Cálculo para Ciências Ambientais

Anderson Luis de Moraes
Cátia Araujo Farias
Silvia Cristina de Jesus

Cálculo para Ciências Ambientais

Autores:
Anderson Luis de Moraes
Cátia Araujo Farias
Silvia Cristina de Jesus

Capa e Projeto Gráfico: Cátia Araujo Farias
Dados internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Moraes, Anderson Luis de; Farias, Cátia Araujo; Jesus, Silvia Cristina de
Cálculo para Ciências Ambientais [recurso eletrônico]/ Anderson Luis de Moraes, Cátia Araujo Farias, Silvia Cristina de Jesus - São Carlos: CEDA-UFSCar, 2024.
105p. il.
Inclui bibliografia.
ISBN 978-65-85443-07-4
1.Cálculo. 2. Ciências Ambientais. 3 Modelagem. Moraes, Anderson Luis de I. Farias, Cátia Araujo II. Jesus, Silvia Cristina de

Centro de Estudos em Democracia Ambiental
Universidade Federal de São Carlos
Via Washington Luís, km 235 CEP: 13565-905.
São Carlos, SP. Brasil
Telefone: (16) 3306-6789
http://www.ceda.ufscar.br

APRESENTAÇÃO

O cálculo para a área de Ciências Ambientais tem sido uma ferramenta de estudo de validação e de praticidade, por permitir a criação de modelos matemáticos que representam processos naturais complexos, contribuindo para uma análise mais acurada dos componentes ambientais. Neste aspecto, podemos citar o estudo dos ciclos biogeoquímicos, como por exemplo o ciclo do carbono e o ciclo do nitrogênio, tendo em vista ser um dos processos naturais que envolvem interações contínuas da água na atmosfera, na superfície terrestre e no subsolo, que são ambientes que apresentam características diversas agindo com outros e, gerando uma infinidade de conjuntos de dados. Assim, o cálculo, especialmente o diferencial e integral, tornam-se ferramentas prestimosas para analisar e interpretar tais dados, de maneira a otimizar o uso dos recursos naturais, bem como fornecendo resultados quantitativos para a tomada de decisões, reverberando no desenvolvimento sustentável. Portanto, a utilização do cálculo a partir da modelagem matemática para ciências ambientais auxilia na predição de comportamentos futuro dos sistemas ambientais.

Foi com essa investidura que construímos este livro para você estudante de Ciências Ambientais, de maneira a demostrar a importância da matemática para sua formação acadêmica e profissional.

Esperamos que apreciem os capítulos que construímos com zelo, baseado em nossas experiências como colaboradores da disciplina de Cálculo para Ciências Ambientais, sempre em atendimento ao objetivo da mesma que, conforme o PPC, o de buscar capacitá-los a compreender o processo de construção e análise de modelagem e sua aplicação em sistemas ambientais, bem como o entendimento da linguagem matemática e simulações na gestão e análise ambiental. Para tanto, os capítulos ficaram assim distribuídos: No Capítulo 1, temos uma introdução ao tema central: a Matemática nas Ciências Ambientais, porque a matemática descreve a harmonia da natureza. No Capítulo 2, apresentamos uma revisão de Conjuntos Numéricos, preparando-os para o Capítulo 3, em que trazemos uma revisão de Aritmética. Já no Capítulo 4, trabalhamos com as Medições e Conversões de Unidades. Estes capítulos são para dar aquela animada nos ânimos e avançarem para o Capítulo 5, onde trazemos as Funções, preparando-os para o estudo das Derivadas. Mas, antes, no Capítulo 6, trataremos da Taxa de Variação e Limite, para adentrarmos no Cálculo Diferencial e as Regras de Derivação, que está no Capítulo 7. Após as Derivadas, alcançamos o Cálculo Integral e as Regras de Integração, no Capítulo 8. No Capítulo 9, vamos apresentar as Equações Diferenciais para encontrar, no Capítulo 10, as Aplicações de Derivadas e de Integrais nas Ciências Ambientais. O estudo culmina com a Modelagem Matemática, no Capítulo 11. Finalizamos o estudo com alguns Exercícios com respostas, no Capítulo 12.

Caro estudante, esperamos que experienciem este trabalho que dedicamos a vocês e que ao final sintam-se aptos a avançarem nas demais disciplinas.

Desejosos de que obtenham êxito na feitura dos exercícios propostos, deixamos registrado nossas maiores considerações.

Abraços,

Anderson Luis de Moraes
Cátia Araujo Farias
Silvia Cristina de Jesus

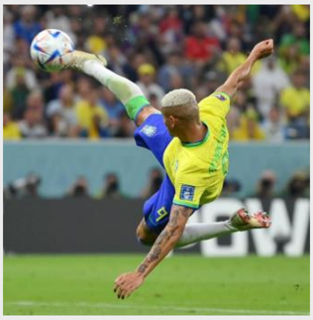
São Carlos/SP, setembro de 2024.

A MATEMÁTICA NAS CIÊNCIAS AMBIENTAIS

A matemática descreve a harmonia da natureza...

Já observaram algumas folhas e flores que parecem desenhar sua forma? Já imaginaram que existe uma sequência que estabelece uma harmonia no formato e sequenciamento dos vegetais? Nós estamos falando sobre a Sequência de Fibonacci, ou o Código Secreto da Natureza!

Reparem nesta imagem!



Fonte: Justin Setterfield/Getty Images; Pixabay

Um espetáculo de movimento técnico-acrobático! Em fração de segundos, o jogador Richarlison da seleção brasileira de futebol selou a vitória do Brasil contra a Sérvia (2 a 0) na Copa do Catar em 2022. Este gol de voleio foi eleito o mais bonito da competição.

Pausa para reflexão!

Será que essa beleza de registro fotográfico tem uma relação com a matemática?
O gol foi um espetáculo porque representa uma Sequência de Fibonacci

Acesse o link, que traz a explicação sobre o que é a Sequência de Fibonacci, também conhecida como o "código secreto da natureza". Vamos lá?
https://www.youtube.com/watch?v=cHZWZhHQq4g

Essa sequência, aplicada no registro fotográfico cria composições visualmente atraentes e equilibradas.

O fato é que a imagem se torna incrivelmente agradável aos olhos, daí o registro representar o belo do ponto de vista capturado nas lentes do fotógrafo

Fonte: Justin Setterfield/Getty Images

A sequência de Fibonacci corresponde às medidas dos lados dos quadrados que montam uma **espiral logarítmica**!

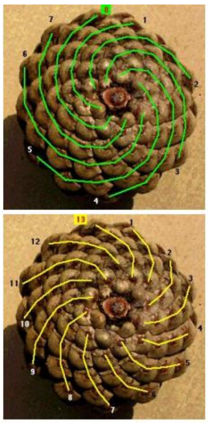
Sobre a aplicação da espiral logarítmica, leia o artigo de Michel Spira, intitulado “A Espiral Logarítmica e o Logo SBM”, publicado na Revista Matemática Universitária, que é uma publicação da Sociedade Brasileira de Matemática, vol. 2, 2021.

Ao ler o artigo, você vai observar que o autor apresenta a família de espirais logarítmicas e algumas de suas propriedades. Vamos lá? https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/11/sites/11/2022/01/RMU-2021_2-6.pdf

Na natureza, são inúmeras as aparições da sequência de Fibonacci, como no girassol (Helianthus annuus), que é uma planta originária da América do Norte e possui a particularidade de ser heliotrópica, ou seja, de girar o caule sempre posicionando a flor na direção do sol. (MELO, 2023).

Os girassóis representam o exemplo mais extremo da sequência Margarida, que pode ter 21, 34, 55, 89 ou 144 pétalas na primeira fileira. Essas ficam emparelhadas, respectivamente, com outras 34, 55, 89, 144 ou 233 na segunda fileira.

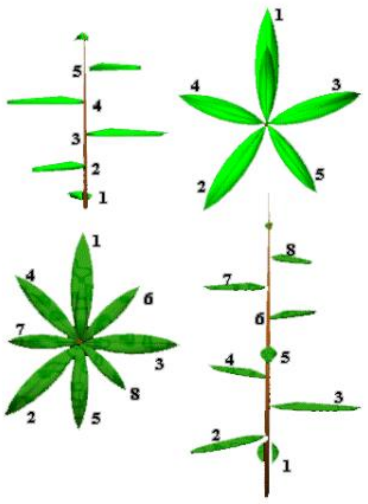
Na concha do caramujo (Nautilus pompilius), que é uma espécie que tem seu habitat nas encostas de recifes de coral, em águas quentes do sudoeste do Pacífico, a uma profundidade de até 610 metros, podemos observar que a dimensão de cada novo “pedacinho” representa a soma das dimensões dos dois antecessores.



Fonte: http://www.mat.uc.pt/~mat0839/fibo.html

Nas pinhas (Annona squamosa L.), que é o fruto da árvore araucária, onde o pinhão se forma, as espirais de Fibonacci são visíveis. Podemos verificar que existem dois conjuntos de espirais com 8 e 13 espirais. Tais conjuntos nos revelam os números de Fibonacci.

Se estudarmos o arranjo das folhas (filotaxia) no caule e nos ramos vamos perceber que há também a sequência. Ao selecionarmos uma folha qualquer numa haste, atribuindo-lhe o número zero, podemos contar o número de folhas (admitindo que nenhuma se partiu) até a folha que está com a mesma orientação que a folha zero. Neste percurso, verificaremos que o número total de folhas é um número de Fibonacci.



Fonte: https://webpages.ciencias.ulisboa.pt/~ommartins/seminario/fibonacci/cap3_5.htm

Sequência de Fibonacci

$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 2, a_4 = 3,\ a_5 = 8,\ a_6 \ldots$

Cada número da sequência de Fibonacci é a soma dos dois números anteriores. Esta propriedade pode ser descrita pela Fórmula de recursão:

$$A_{n+1} = n_{a-1} + a_n$$

Em que, $n = 2,3,4$

Assim, teremos:

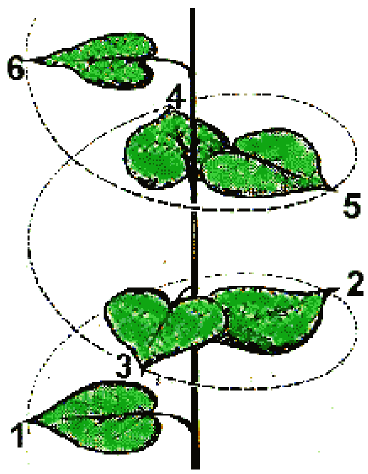
$$1 + 1 = 2$$
$$2 + 1 = 3$$
$$3 + 2 = 5$$
$$5 + 3 = 8$$
$$8 + 5 = 13$$

e assim sucessivamente.

Pausa para reflexão!

A **Filotaxia** corresponde ao padrão de distribuição das folhas ao longo do caule das plantas. Conhecendo a filotaxia de uma espécie pode-se auxiliar na identificação de sua família botânica.

Agora, vejamos o caso em que as folhas se distribuem em torno do caule em um padrão helicoidal! Para isto, consulte o livro de BATSCHELET (1978). Observe a figura 8.9 da pág. 210. Este arranjo ocorre nas roseiras, alguns salgueiros e cerejeiras.



Fonte:
https://www.uel.br/projetos/matessencial/basico/alegria/seqfib2.html#sec08

Algumas outras relações da Sequência de Fibonacci com a natureza você pode conhecer, acessando o link: https://www.hipercultura.com/sequencia-fibonacci/

Pausa para reflexão!

Existe uma relação entre Inteligência Artificial e a Sequência de Fibonacci? Claro que sim!

Vejamos, o Excel, que é uma planilha eletrônica, desenvolvida pela empresa de tecnologia Microsoft, usa a sequência de Fibonacci para sua estruturação sequencial. E, conforme os estudos que a empresa vem desenvolvendo, a sequência pode ser usada em redes neurais artificiais para melhorar o desempenho e a precisão dos modelos.

Pelo que se pode perceber a sequência de Fibonacci pode ser usada em AI em diversos programas.

A sequência de Fibonacci pode ser usada para definir o tamanho e a complexidade de redes neurais artificiais. Por exemplo, a sequência pode ser usada para determinar o número de camadas e neurônios em uma rede neural. Além disso, a sequência pode ser usada para definir a taxa de aprendizado em um algoritmo de treinamento de redes neurais.

No contexto das ciências ambientais, a compreensão dos padrões matemáticos subjacentes à natureza não apenas enriquece nosso entendimento do mundo que nos cerca, mas também nos capacita a tomar decisões informadas e sustentáveis. Neste sentido, o cálculo desempenha um papel essencial na compreensão e modelagem dos fenômenos e processos ambientais, uma vez que se revela como uma ferramenta indispensável para compreender e lidar com os desafios complexos que enfrentamos em um mundo em rápida transformação. Sua importância, portanto, está na capacidade de descrever mudanças contínuas ao longo do tempo ou do espaço, algo comum em muitos aspectos do ambiente natural. Por exemplo, ao analisar a dispersão de poluentes na atmosfera, o cálculo é utilizado para descrever como a concentração de poluentes varia em relação ao tempo e à localização. Além disso, o cálculo oferece ferramentas para analisar taxas de mudança, como velocidade, taxa de crescimento e taxa de dispersão, o que é essencial para compreender e modelar processos dinâmicos na natureza.

A modelagem de sistemas ambientais dinâmicos também se beneficia enormemente do cálculo. Na dinâmica de populações, por exemplo, equações diferenciais são frequentemente utilizadas para modelar como o tamanho de uma população muda ao longo do tempo em resposta a fatores como taxa de natalidade, mortalidade e migração. Essa capacidade de modelar sistemas complexos permite prever o comportamento futuro desses sistemas, auxiliando na tomada de decisões informadas em questões de gestão ambiental.

Estas anotações têm como objetivo explorar alguns conceitos básicos de cálculo e sua aplicação específica nas ciências ambientais, fornecendo uma base sólida para análises quantitativas e modelagem em diversos campos, desde a ecologia até a gestão de recursos naturais. Ao longo das páginas deste livro, vamos mergulhar não apenas nos fundamentos do cálculo, mas também em como esses princípios matemáticos se entrelaçam com os padrões observados na natureza. A compreensão de seu papel na natureza não apenas nos fascina, mas também nos oferece percepções valiosas sobre os processos biológicos e ecológicos que moldam nosso planeta. Dessa maneira, vamos explorar como essas ferramentas matemáticas podem ser aplicadas para resolver problemas concretos nas ciências ambientais.

Para tanto, vamos explorar estudos de caso e exemplos práticos que ilustram como o cálculo pode ser aplicado de forma eficaz para abordar problemas reais no campo das ciências ambientais.

Antes de prosseguirmos nessa jornada de descoberta e aprendizado, convido você a refletir sobre a importância do cálculo no contexto das ciências ambientais. Da mesma forma que a Sequência de Fibonacci está presente em padrões naturais aparentemente caóticos, o cálculo nos permite encontrar ordem e compreensão em sistemas complexos e interconectados.

Para se inteirar sobre sistemas complexos, leia “Modelagem de Sistemas Complexos para Políticas Públicas” acessando o link:
https://repositorio.ipea.gov.br/bitstream/11058/4155/1/Modelagem%20de%20sistemas%20complexos%20para%20politicas%20publicas.pdf

Que este livro seja não apenas uma introdução ao fascinante mundo do cálculo, mas também um convite para explorar as infinitas possibilidades que surgem quando combinamos a matemática com a curiosidade e o cuidado pelo nosso planeta.

Referências

BARRETO, P. H. J. S. Sequências de Fibonacci, Lucas e Pell. 62f. Dissertação de Mestrado - PROFMAT - Universidade Federal do Cariri. Juazeiro do Norte. Ceará, 2019.

BATSCHELET, E. Introdução à matemática para biocientistas. Trad. Vera Maria Abud Pacífico da Silva e Junia Maria Penteado de Araújo Quitete. São Paulo: Universidade de São Paulo. 1978.

BORGES, F. P. A. Sequência de Fibonacci e algumas de suas aplicações. 89f. Dissertação de Mestrado - PROFMAT - Universidade Federal de Mato Grosso. Cuiabá, 2015.

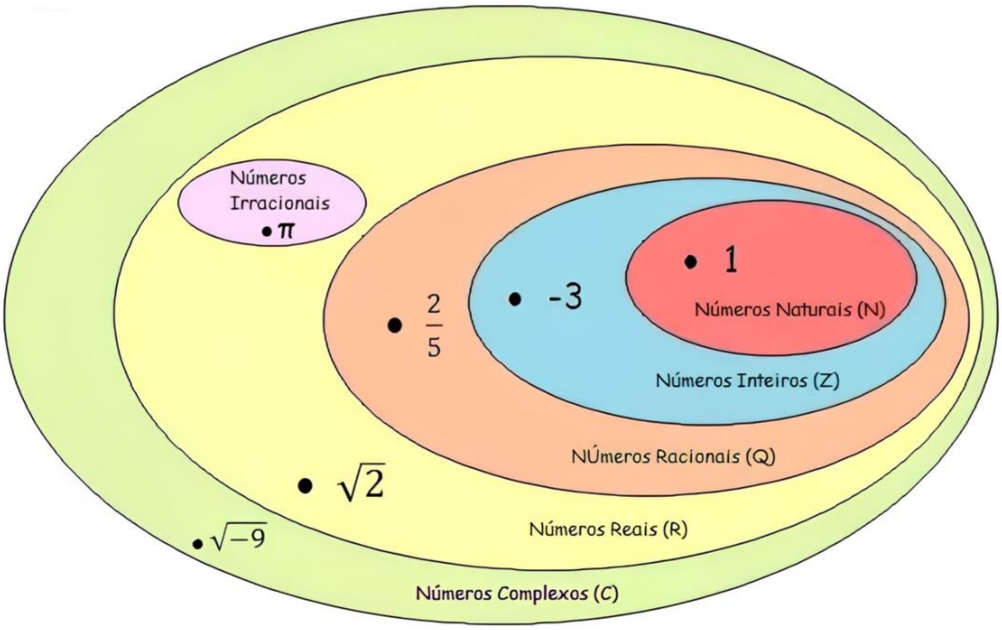
CONJUNTOS NUMÉRICOS

Pausa para reflexão!

No Congresso de Pesquisa e Ensino em Ciências, em 2019, foi apresentado um trabalho de pesquisa intitulado "O uso do jogo do bingo dos conjuntos numéricos como metodologia auxiliar no ensino das relações de conjuntos numéricos" que relata algumas experiências práticas com o uso de jogos didáticos e de materiais manipuláveis, objetivando estimular o interesse e a participação dos alunos nas aulas de teoria dos conjuntos.

Para conhecer tal experiência, acesse o link:
https://www.editorarealize.com.br/editora/anais/conapesc/2019/TRABALHO_EV126_MD1_SA1_ID991_01072019142451.pdf

Diagrama dos Conjuntos Numéricos



Fonte: https://cursoenemgratuito.com.br/conjuntos-numericos/

Números Naturais (**N**): São os números inteiros não negativos, começando a partir do 0 e indo indefinidamente (0, 1, 2, 3, ...).

Números Inteiros (**Z**): Incluem todos os números positivos, negativos e o zero (..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...).

Números Racionais (**Q**): São os números que podem ser expressos como frações, onde o numerador e o denominador são inteiros, e o denominador não é zero. Os números racionais incluem os inteiros, frações e números decimais finitos ou periódicos.

Subconjuntos dos números racionais

Q^+ trata-se do conjunto dos números racionais positivos.
Q^- trata-se do conjunto dos números racionais negativos.
O número zero é também um número racional.

Números Reais (**R**): Representam todos os números racionais e irracionais em uma reta numérica contínua. Portanto, R corresponde a união entre o conjunto dos números racionais (Q) e o conjunto dos números irracionais (I). (**R = Q ∪ I**), ou seja:

$$Q = \left\{\frac{p}{q}; p\ e\ q\ \in Z, com\ q\ \neq 0\}\right\}$$

Subconjuntos dos números reais

$R^* = \{x \in R \mid x \neq 0\}$: conjunto dos números reais não-nulos.
$R^+ = \{x \in R \mid x \geq 0\}$: conjunto dos números reais não-negativos.
$R^{*+} = \{x \in R \mid x > 0\}$: conjunto dos números reais positivos.
$R^- = \{x \in R \mid x \leq 0\}$: conjunto dos números reais não-positivos.
$R^{*-} = \{x \in R \mid x < 0\}$: conjunto dos números reais negativos.

Intervalos Reais

Sejam a e b números reais e a < b:

Intervalo aberto de extremos:]a,b[= {x ∈ R | a < x < b}

Intervalo fechado de extremos: [a,b] = {x ∈ R | a ≤ x ≤ b}

Intervalo aberto à direta (ou fechado à esquerda) de extremos: [a,b[= {x ∈ R | a ≤ x < b}

Intervalo aberto à esquerda (ou fechado à direita) de extremos:]a,b] = {x ∈ R | a < x ≤ b}

Números Irracionais (**I**): São números que não podem ser expressos como frações e têm uma expansão decimal não periódica e infinita. Ou seja, os números irracionais (I) são aqueles cuja representação decimal é infinita e não possui período.

O que é uma dízima periódica?

Uma dízima periódica é um **número real** da forma: m,npppp... em que **m**, **n** e **p** são **números inteiros**, sendo que o **número p** se repete indefinidamente, razão pela qual usamos os três pontos: ... após o mesmo.

A parte que se repete é denominada **período**.

Exemplos:

$$0,33333\ldots = 0,3$$
$$1,66666\ldots = 1,6$$
$$12,1212\ldots = 12,12$$
$$0,99999\ldots = 0,9$$
$$7,13333\ldots = 7,13$$

$$0,101001000100001\cdots1\underbrace{00\cdots00}_{n\ \ zeros}1\underbrace{00\cdots00}_{n+1\ \ zeros}1\cdots$$

Exemplos famosos incluem a raiz quadrada de 2 (√2) e o número *π* (pi).

Um outro exemplo:

$X = 0,10100100010000100000$, que é um número irracional, embora pareça uma dízima periódica.

Números Complexos (**C**): São números da forma a + bi, onde "a" e "b" são números reais e "i" é a unidade imaginária, que é definida como a raiz quadrada de -1.

Os números complexos incluem os números reais como um caso especial quando a parte imaginária (b) é zero.

Potenciação de números racionais

Podemos escrever potenciação da seguinte maneira: potência $\boldsymbol{q}$ elevado a $\boldsymbol{n}$ (q^n) do número racional ($\boldsymbol{q}$ é um produto de $\boldsymbol{n}$ fatores iguais).
O número $\boldsymbol{q}$ é denominado a base e o número $\boldsymbol{n}$ é o expoente.
A potenciação de números racionais segue algumas regras específicas que são derivadas das propriedades dos expoentes e das operações com frações.

Regras para entender como potenciar números racionais fracionários

Potência com Expoente Positivo	Se $\boldsymbol{a}$ é um número racional e $\boldsymbol{n}$ é um número natural positivo, então a^n é obtido multiplicando a por si mesmo n vezes.	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\times\frac{3}{4} = \frac{9}{16}$
Potência com Expoente Positivo	Se **a** é um número racional **n** é um número natural positivo, então a^n é obtido multiplicando a por si mesmo n vezes.	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\times\frac{3}{4} = \frac{9}{16}$
Potência com Expoente Zero	Qualquer número diferente de zero, elevado a potência zero é igual a 1.	$2^0 = 1$
Potência com Expoente Negativo	a^{-n} é o inverso de a^n, ou seja, $\frac{1}{a^n}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}$

Potência de Produto de Números Racionais	$(a \times b)^n = a^n \times b^n$	$\left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} \times \frac{9}{16} = \frac{9}{64}$
Potência de Quociente de Números Racionais	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$

Estas regras facilitam a manipulação e simplificação de expressões envolvendo potências de números racionais, permitindo que você simplifique ou calcule essas expressões de maneira eficiente.

Pausa para reflexão!

Uma pergunta que já formulamos em nossa vida de estudantes: quem “inventou” os números racionais?

Os números racionais não foram "inventados" por uma única pessoa ou em um momento específico. Eles são uma descoberta gradual e coletiva que remonta à antiguidade e está associada ao desenvolvimento da matemática ao longo da história.

Os números racionais surgiram naturalmente da necessidade de representar quantidades fracionárias, como partes de um todo. As antigas civilizações, como os egípcios e os babilônios, já usavam frações em seus sistemas numéricos para lidar com divisões não inteiras.

Os matemáticos gregos, como ***Euclides****, contribuíram para o entendimento dos números racionais, fornecendo métodos para expressar e manipular frações. No entanto, é importante notar que a ideia de números racionais como entendemos hoje não era formalizada na forma de uma teoria abstrata.*

A sistematização dos números racionais como uma parte fundamental da teoria dos números ocorreu mais tarde na história da matemática, com contribuições significativas de matemáticos medievais e renascentistas, como ***Fibonacci*** *(lembra dele no início dos estudos?),* ***Nicole Oresme*** *e* ***Simon Stevin****.*

Em resumo, os números racionais evoluíram ao longo do tempo, resultado do esforço e contribuições de muitos matemáticos ao longo de diferentes culturas e períodos históricos, representando, portanto, um produto do desenvolvimento matemático contínuo ao longo de milênios.

Acesse o link abaixo e viagem no tempo da história da matemática, conhecendo as principais descobertas e seus descobridores.
https://pt.mathigon.org/timeline/

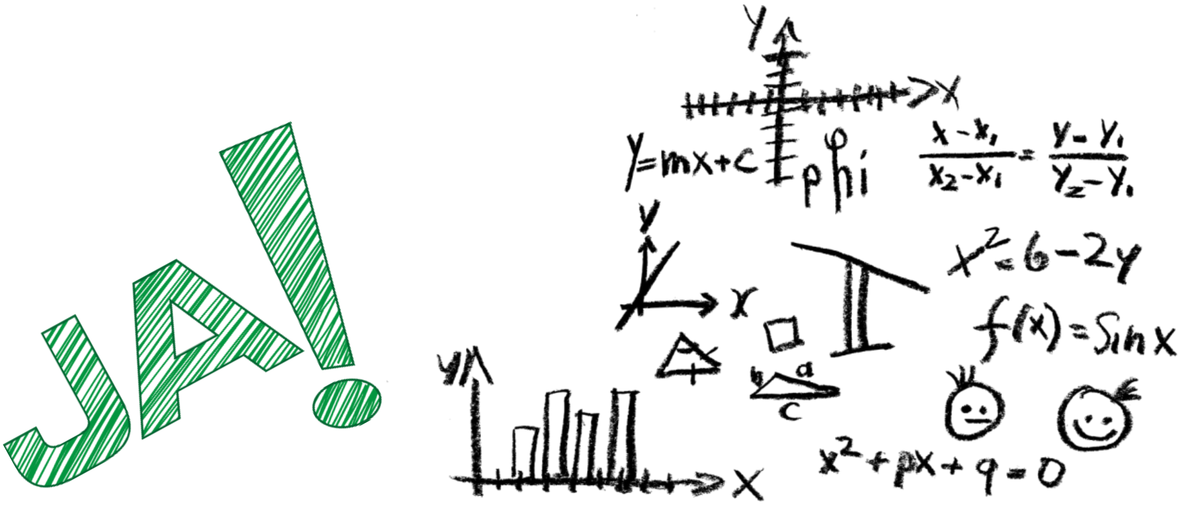
Referências

IEZZI, G. Fundamentos de matemática elementar, 1: conjuntos. São Paulo: Atual, 2013. 420p.

LEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PERIGO, Roberto. Matemática - Volume único. São Paulo: Atual Didáticos; 6ª edição (3 dezembro 2019). 960 p.

REVISÃO DE ARITMÉTICA

Para a revisão, selecionamos alguns exercícios apostilados muito interessantes. Consulte:



Tessari, V.; Casali, R. M.; Mikowski, A. Coletânea de Exercícios de Matemática Básica e Pré-Cálculo. Apostila do Projeto de Extensão Pré-Cálculo Joinville, Departamento de Engenharias da Mobilidade, Centro Tecnológico de Joinville, Universidade Federal de Santa Catarina. 2. ed. Joinville, 2021. Disponível em: https://precalculojlle.paginas.ufsc.br/files/2018/11/Coletanea_Exercicios_Matematica_Basica.pdf

PROJETO SABERMAT. MATEMÁTICA BÁSICA.2024
COORDENADORA: Professora Cleide Vieira. Disponível em:
https://www.udesc.br/arquivos/ceplan/id_cpmenu/463/Apostila_Completa_2024_v2_17086306377595_463.pdf

MEDIÇÕES E CONVERSÕES

Metrologia

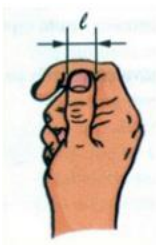
Ao longo da história, a metrologia desempenhou um papel crucial no avanço da ciência, tecnologia e comércio, garantindo a precisão e a confiabilidade das medições em diversas áreas.
A metrologiaé a ciência que estuda as medições e seus métodos, abrangendo o desenvolvimento de padrões, unidades de medida e os processos de medição.
A história da metrologia confunde-se com a evolução da humanidade já por 4.000 anos... O homem, desde os tempos remotos, necessitava de medir comprimentos e, com o passar dos tempos, essas medições necessitaram ser idênticas às executadas pelos outros homens, de outras tribos, nações. Dessa maneira, tornou-se necessária a adoção de padrões que reproduzem as unidades de medidas.

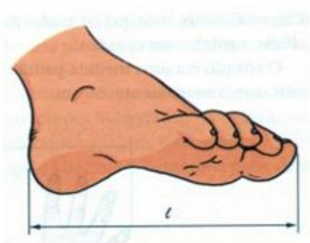
Aqui estão alguns marcos importantes na história da metrologia

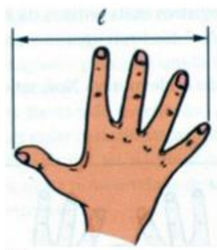
1. Antiguidade

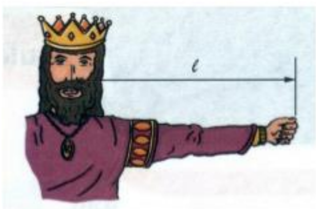
As primeiras formas de medição estavam relacionadas à agricultura e ao comércio. As unidades de medida eram muitas vezes baseadas em partes do corpo humano, como o pé ou a mão.

Unidade	Relação com metro
1 polegada	0,0254 m
1 pé	0,3048 m
1 jarda	0,91 m
1 milha	1.609,34 m
1 légua	4828,032 m


Polegada


Pé


Palmo


Jarda


Passo

2. Civilizações Antigas

Egípcios, babilônios e romanos desenvolveram sistemas de medidas para diversas finalidades, incluindo construção, comércio e astronomia. O padrão romano, por exemplo, incluía a "*mila passuum*" (mil passos), que influenciou o desenvolvimento de medidas de distância.

3. Idade Média

Durante a Idade Média, a metrologia esteve muitas vezes ligada a guildas (grupo de negociantes, artesãos, artistas) e corporações, com padrões locais variados. As feiras medievais eram locais importantes para a padronização de medidas.

4. Renascimento

Com o Renascimento, houve uma maior ênfase na experimentação científica e no desenvolvimento de padrões mais precisos. A padronização de medidas tornou-se essencial para o comércio internacional.

5. Sistema Métrico

No final do século XVIII, o sistema métrico foi desenvolvido durante a Revolução Francesa. O metro, inicialmente definido como 1/10.000.000 da distância entre o Equador e o Polo Norte, tornou-se a base do sistema métrico.

6. Século XX

O século XX viu avanços significativos na metrologia com o desenvolvimento da teoria da relatividade, que influenciou a definição de unidades fundamentais. Em 1960, o sistema internacional de unidades (SI) foi estabelecido, com base em constantes fundamentais da natureza.

7. Atualidade

A metrologia moderna inclui tecnologias avançadas, como interferometria a laser (método de medição de distâncias com alta precisão) e relógios atômicos. A constante de Planck e outras constantes fundamentais são utilizadas para definir unidades, tornando o sistema internacional mais preciso e estável.

Sistema Internacional de Unidades (SI)

O Sistema Internacional de Unidades (SI) é o sistema de unidades de medida que é amplamente utilizado em todo o mundo para padronizar e facilitar a comunicação de quantidades físicas. O SI foi estabelecido para proporcionar consistência e precisão nas medições em diversas disciplinas científicas e tecnológicas e é mantido pela Conferência Geral de Pesos e Medidas (CGPM).

A CGPM se reúne regularmente para revisar e atualizar as definições das unidades, garantindo que o sistema permaneça preciso e consistente mediante os avanços científicos e tecnológicos.

O SI é baseado em sete unidades básicas, que são consideradas independentes e, por conseguinte, não podem ser derivadas de outras unidades. Essas unidades básicas são:

Metro (m) para comprimento.
Quilograma (kg) para massa.
Segundo (s) para tempo.
Ampere (A) para corrente elétrica.
Kelvin (K) para temperatura.
Mol (mol) para quantidade de substância.
Candela (cd) para intensidade luminosa.

Além dessas unidades básicas, o SI inclui as unidades derivadas, formadas a partir de combinações das unidades básicas, como por exemplo, o metro por segundo (m/s), que é a unidade derivada para velocidade.

O SI utiliza prefixos para representar múltiplos ou submúltiplos de uma unidade. Por exemplo, o quilômetro (km) é mil vezes maior que o metro, enquanto o milímetro (mm) é mil vezes menor que o metro, como veremos nas tabelas a frente.

Algumas unidades no SI são definidas com base em constantes fundamentais da natureza. Por exemplo, a velocidade da luz no vácuo define o metro, e a constante de Planck define o quilograma.

Ao longo do tempo, o SI passou por revisões e atualizações. Uma mudança notável ocorreu em 2019, quando as definições de quatro unidades básicas (o quilograma, o ampere, o kelvin e o mol) foram revisadas com base em constantes fundamentais.

Para saber sobre o Sistema Internacional de Unidades, acesse o link:
https://querobolsa.com.br/enem/fisica/sistema-internacional-de-unidades

Sistema Decimal

O sistema decimal é um sistema numérico que se baseia no número 10. Ele é amplamente utilizado em todo o mundo e é o sistema padrão para representar números na maioria das culturas.

No sistema decimal, os algarismos vão de 0 a 9, e cada posição à esquerda de um número tem um valor 10 vezes maior do que a posição à sua direita.

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
Múltiplos			UF	Submúltiplos		

Assim, o sistema decimal é composto por sua unidade fundamental (UF) o metro (m) e seus múltiplos e submúltiplos.

A base 10 é fundamental para operações matemáticas cotidianas e é utilizada em várias áreas, desde a contagem simples até cálculos complexos.

Esse sistema é considerado essencial para a comunicação numérica, tendo em vista ser amplamente utilizado em contextos financeiros, científicos, educacionais e cotidianos; inclusive, proporcionando uma base consistente e intuitiva para representar quantidades e realizar cálculos matemáticos de maneira geral.

Alguns conceitos fundamentais do sistema decimal

Algarismos Decimais: os algarismos decimais são 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Eles são combinados para formar números.

Posições Decimais: cada posição em um número decimal tem um valor associado a potências de 10. A posição mais à direita representa as unidades, a segunda posição à direita representa dezenas, a terceira centenas, e assim por diante.

Notação Posicional: a notação posicional é usada no sistema decimal, o que significa que o valor de um dígito depende da posição que ocupa em relação aos outros dígitos no número.

Potências de 10: cada posição em um número decimal pode ser representada como 10 elevado a uma potência. Por exemplo, $10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, etc.

Decimais e Frações: podem ser convertidos em frações, e vice-versa. Por exemplo, 0.5 é equivalente a 1/2, e 0.25 é equivalente a 1/4.

Operações Básicas: adição, subtração, multiplicação e divisão no sistema decimal seguem princípios semelhantes aos do sistema de base 10.

Conversão de Medidas

Multiplica-se por 10

km	**hm**	**dam**	**m**	**dm**	**cm**	**mm**
Múltiplos			UF	Submúltiplos		

Divide-se por 10

Unidade de Área

Multiplica-se por 100

km^2	**hm^2**	**dam^2**	**m^2**	**dm^2**	**cm^2**	**mm^2**
Múltiplos			UF	Submúltiplos		

Divide-se por 100

Unidade de Volume

Multiplica-se por 1000

km^3	**hm^3**	**dam^3**	**m^3**	**dm^3**	**cm^3**	**mm^3**
Múltiplos			UF	Submúltiplos		

Divide-se por 1000

Unidade de Capacidade

Multiplica-se por 10 →

kl	hl	dal	l	dl	cl	ml
Múltiplos			UF	Submúltiplos		

← Divide-se por 10

Unidade de Massa

Multiplica-se por 10 →

kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
Múltiplos			UF	Submúltiplos		

← Divide-se por 10

Unidade de Tempo

Transformação de hora para minuto ou de minuto para segundo, multiplicamos por 60. Se for no sentido contrário, dividimos por 60.

Multiplica-se por 60 →

Hora	Minuto	Segundo

← Divide-se por 60

Metrologia em Ciências Ambientais

A qualidade dos dados ambientais é essencial para avaliar a saúde dos ecossistemas, identificar impactos ambientais e desenvolver estratégias de conservação. A metrologia desempenha um papel crucial na garantia da qualidade desses dados, fornecendo métodos e padrões para realizar medições precisas e confiáveis.

Instrumentação e Calibração

Na metrologia aplicada às ciências ambientais, a seleção e calibração adequadas dos instrumentos de medição são fundamentais. Por exemplo, em estudos de qualidade da água, os medidores de pH e condutividade devem ser calibrados regularmente para garantir a precisão das medições. Da mesma forma, os sensores de temperatura e umidade usados em estações meteorológicas requerem calibração periódica para garantir resultados confiáveis.

Um exemplo prático é o monitoramento da qualidade do ar em áreas urbanas. Nesse caso, instrumentos como espectrofotômetros são usados para medir a concentração de poluentes atmosféricos, como óxidos de nitrogênio e material particulado. Esses instrumentos devem ser calibrados regularmente usando padrões de referência certificados para garantir a precisão das medições.

Padronização e Certificação

A padronização de métodos de medição e a certificação de materiais de referência desempenham um papel crucial na metrologia ambiental. Por exemplo, a Agência de Proteção Ambiental dos Estados Unidos (EPA) estabelece métodos padronizados para a análise de poluentes em água e ar, garantindo a consistência e comparabilidade dos dados coletados em diferentes locais e períodos.

Um exemplo prático é a certificação de materiais de referência para análise de metais pesados em sedimentos de rios. Esses materiais são utilizados para calibrar instrumentos de análise química e garantir a precisão das medições em estudos de contaminação ambiental.

Monitoramento Ambiental

O monitoramento ambiental é uma aplicação prática da metrologia em ciências ambientais. Através do uso de instrumentação adequada e métodos padronizados, é possível coletar dados sobre a qualidade do ar, água, solo e biodiversidade. Esses dados são essenciais para avaliar o estado do meio ambiente, identificar fontes de poluição e monitorar tendências ao longo do tempo.

Um exemplo prático é o uso de sensores remotos para monitorar a cobertura vegetal em áreas florestais. Imagens de satélite são processadas usando algoritmos de sensoriamento remoto para estimar a área de floresta desmatada e monitorar as mudanças na cobertura vegetal ao longo do tempo.

Medidas na Natureza

- Medição de Precipitação: A quantidade de chuva é uma medida crucial para compreender os padrões climáticos e hidrológicos de uma região. A precipitação é geralmente medida em milímetros (mm) ou litros por metro quadrado (l/m^2), utilizando pluviômetros padronizados.
- Monitoramento de Temperatura: A temperatura do ar e da água é uma variável importante em estudos ambientais. A temperatura é medida em graus Celsius (°C) ou kelvin (K), utilizando termômetros calibrados.
- Análise de Qualidade da Água: A qualidade da água é avaliada através de parâmetros como pH, condutividade elétrica, oxigênio dissolvido, entre outros. O pH é uma medida da acidez ou alcalinidade da água, geralmente medida em uma escala de 0 a 14. A condutividade elétrica da água está relacionada à sua capacidade de conduzir corrente elétrica e é medida em siemens por metro (S/m).
- Monitoramento de Qualidade do Ar: A qualidade do ar é avaliada através da
- medição de poluentes atmosféricos como dióxido de enxofre (SO2), óxidos de nitrogênio (NOx), ozônio (O3), material particulado (PM10, PM2.5), entre outros. As concentrações desses poluentes são geralmente medidas em microgramas por metro cúbico ($\mu g/m^3$) ou partes por milhão (ppm).
- Quantificação de Biomassa: Em estudos de ecologia e conservação, é comum medir a biomassa de organismos vegetais e animais. A biomassa pode ser expressa em unidades de massa, como gramas (g) ou quilogramas (kg), e é medida utilizando balanças calibradas.

- Mensuração de Biodiversidade: A biodiversidade de uma área pode ser quantificada através de medidas como riqueza de espécies, diversidade de índices e equitabilidade. Essas medidas são essenciais para avaliar a saúde e a estabilidade dos ecossistemas.

Modelagem e Previsão

Além do monitoramento direto, a metrologia também é aplicada na modelagem e previsão de fenômenos ambientais. Modelos matemáticos e estatísticos são desenvolvidos com base em dados coletados por instrumentação metrologicamente validada. Esses modelos permitem simular cenários futuros, prever impactos de atividades humanas e avaliar a eficácia de medidas de mitigação ambiental.

Um exemplo prático é o uso de modelos de dispersão atmosférica para prever a propagação de poluentes emitidos por fontes industriais. Esses modelos consideram dados meteorológicos e características da fonte para estimar a concentração de poluentes em diferentes áreas e períodos.

Instrumentação e métodos de medição

Nas Ciências ambientais, a instrumentação e os métodos de medição desempenham um papel importante na coleta de dados precisos e confiáveis sobre o ambiente natural. Esses instrumentos e técnicas são projetados para capturar uma ampla gama de parâmetros ambientais, desde a qualidade da água e do ar até a biodiversidade e o clima. Alguns aspectos importantes relacionados à instrumentação e métodos de medição incluem a seleção de instrumentos, os princípios do seu funcionamento, calibração e validade, minimização de erros e tipo de monitoramento.

Seleção de instrumentos	A escolha dos instrumentos de medição depende do parâmetro ambiental específico que está sendo investigado. Por exemplo, para medir a qualidade da água, podem ser usados medidores de pH, condutividade elétrica, turbidez e oxigênio dissolvido.
Princípios de funcionamento	É essencial entender os princípios físicos por trás dos instrumentos de medição, o que inclui conhecer como os sensores captam e convertem os sinais ambientais em dados mensuráveis. Por exemplo, um sensor de temperatura pode usar termistores que variam sua resistência elétrica com a temperatura ambiente.
Calibração e validade	Os instrumentos devem ser calibrados regularmente para garantir sua precisão e confiabilidade, o que envolve comparar as leituras dos instrumentos com padrões de referência conhecidos. Além disso, é importante verificar a validade dos resultados, garantindo que as medições estejam dentro dos limites aceitáveis de precisão e exatidão.
Minimização de erros	A precisão das medições pode ser afetada por uma variedade de fatores, incluindo interferências externas, condições ambientais adversas e problemas de manutenção dos instrumentos. Sendo assim, é fundamental identificar e minimizar esses erros para garantir a integridade dos dados coletados.
Monitoramento Contínuo *vs.* Pontual	O monitoramento ambiental pode ser contínuo, com instrumentos permanentemente instalados em locais estratégicos, ou pontual, com medições realizadas em momentos específicos. Ambas as abordagens têm suas vantagens e são utilizadas dependendo dos objetivos do estudo e da disponibilidade de recursos.

O campo da instrumentação ambiental está em constante evolução, com o desenvolvimento de novas tecnologias e técnicas de medição. Isso inclui sensores mais sensíveis, equipamentos portáteis e sistemas automatizados de coleta de dados, que permitem uma monitorização mais eficiente e abrangente do ambiente.

 Pausa para reflexão!

Já ouviu falar sobre distância geodésica? Qual a diferença com a distância planar, medida em metros?

*A diferença entre distância geodésica e distância planar está relacionada ao tipo de superfície sobre a qual as medidas estão sendo feitas. A distância planar, ou **distância euclidiana**, é a medida da distância mais curta entre dois pontos em um plano bidimensional, como um mapa ou uma folha de papel. Ela segue as linhas retas em um plano, sem considerar as características reais da superfície. Já a **distância geodésica** é a medida da distância mais curta entre dois pontos em uma superfície curva, como a superfície da Terra. Ela leva em consideração a curvatura da superfície e é calculada ao longo de uma geodésica, que é a trajetória mais curta entre dois pontos em uma superfície curva.*

Quer saber mais sobre essas diferenças, acesse o link:
https://doc.arcgis.com/pt-br/arcgis-online/analyze/geodesic-versus-planar-distance.htm

Referências

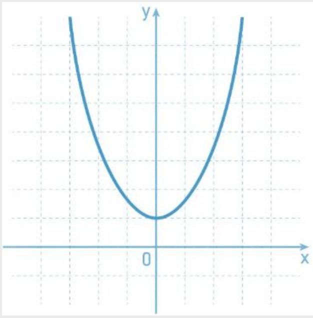
IEZZI, G. Fundamentos de matemática elementar, 1: conjuntos. São Paulo: Atual, 2013. 420p.

FUNÇÕES

Mas, o que é mesmo uma função?

Uma função é uma relação matemática estabelecida entre pares ordenados!

Exemplo gráfico de uma função:



(Fonte: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/como-construir-grafico-uma-funcao.htm)

Então, podemos dizer que função é uma regra que relaciona cada elemento de um conjunto A (representado pela variável x) a um único elemento do conjunto B (representado pela variável y). Assim, ***se para cada x esteja associado um único y***, chamamos esta relação de função.

Dizemos então que, ***"y está em função de x"***.

Observamos, portanto, que há uma função de y em relação a x, porque para cada x escolhido, há um y. Dessa maneira, y é a **variável dependente** e x é a **variável independente**.

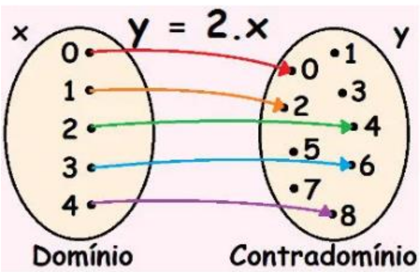
Pausa para reflexão!

A presença da matemática no dia a dia muitas vezes passa despercebido aos nossos olhos, não notamos!

As funções matemáticas desempenham um papel importante em muitas atividades na sociedade, que nem sempre percebamos... Você já ouviu falar de Funções de Hash? Essas funções são empregadas na área da ciência da computação e segurança de dados, porque são algoritmos que mapeiam dados de entrada de tamanho variável para um valor de tamanho fixo, geralmente uma sequência de números e letras. São utilizadas para armazenamento de senhas; verificação de integridade de arquivos; assinaturas digitais, entre outros.

Representação de uma função

Vamos representar, graficamente, uma função de números naturais de forma que, para cada número natural escolhido, obtenha-se o seu dobro.



Vejam que nesta representação há dois conjuntos numéricos, um domínio (X) e um contradomínio (Y). Dentro do contradomínio há um subconjunto chamado de imagem 0; 2; 4; 6; 8.

A imagem é o resultado da função $y = 2x$.

Assim, por definição, há uma função de y em relação a x, porque para cada x escolhido, há um y.

Dessa forma, y é a variável dependente e x é a variável independente.

Se os elementos do domínio e da imagem de uma função pertencem ao conjunto dos números inteiros, por exemplo, dizemos que **f: Z → Z**, lemos que "**f é uma função cujo domínio pertence aos inteiros e cuja imagem pertence aos inteiros**" ou, simplesmente, "**f é uma função de inteiros em inteiros**".

Classificação das funções

Sobrejetora

Essa função, também conhecida como função sobrejetiva ou função epimórfica, é um tipo específico de função matemática entre dois conjuntos, onde cada elemento do conjunto de chegada, ou seja, o contradomínio, é mapeado por pelo menos um elemento do conjunto de partida, ou domínio. Em outras palavras, a função cobre todo o contradomínio, não deixando nenhum elemento sem uma pré-imagem associada.

Formalmente, uma função $f: A \to B$ é considerada sobrejetora se, para cada elemento y no contradomínio B, existe pelo menos um elemento x no domínio A tal que $f(x) = y$.

Injetora

Uma função injetora, também conhecida como função injetiva ou função unívoca, é um tipo específico de função matemática entre dois conjuntos, em que cada elemento distinto do conjunto de partida (domínio) é mapeado para um elemento distinto no conjunto de chegada (contradomínio). Em outras palavras, a função não atribui o mesmo valor a dois elementos diferentes no domínio.

Formalmente, uma função f:A→B é considerada injetora se, para quaisquer dois elementos diferentes x_1 e x_2 no domínio A, os valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$ no contradomínio B também são diferentes.

Matematicamente, isso pode ser expresso como:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Então, se encontrarmos dois elementos diferentes no domínio relacionados a um mesmo valor no contradomínio, a função não será injetora.

Bijetora

Uma função bijetora, também conhecida como função bijetiva, é um tipo específico de função matemática entre dois conjuntos, pois é simultaneamente injetora e sobrejetora. Ou seja, uma função é bijetora se, e somente se, cada elemento distinto no domínio se relaciona com um elemento distinto no contradomínio (injetora), e cada elemento no contradomínio tem pelo menos um elemento correspondente no domínio (sobrejetora).

Formalmente, uma função $f: A \to B$ é bijetiva se atender às seguintes condições:

a) de Injetividade (Injetora): “para quaisquer dois elementos diferentes x_1 e x_2 no domínio A, os valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$ no contradomínio B também são diferentes.”

E,

b) de Sobrejetividade (Sobrejetora): “para cada elemento y no contradomínio B, existe pelo menos um elemento x no domínio A tal que $f(x) \ = \ y$.”

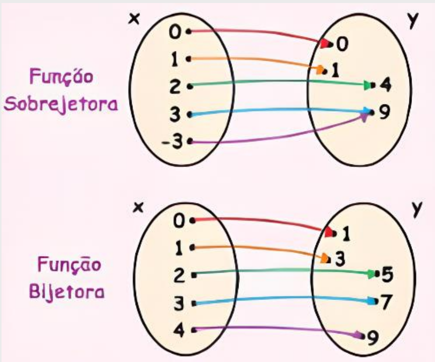
Simples

Uma função simples, em outras palavras, não é injetora e nem sobrejetora.

As funções simples são casos particulares importantes e, embora possam parecer triviais, têm relevância em várias áreas da matemática e em problemas específicos. Elas são fáceis de entender e podem ser úteis em algumas situações, especialmente quando se deseja modelar um comportamento constante ou fixo em um determinado conjunto de dados.

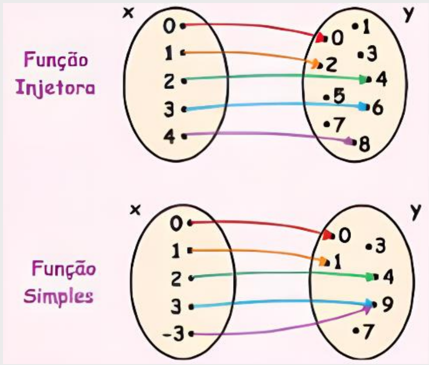
Graficamente, temos:

Sobrejetora: **todos** os elementos recebem uma seta vinda do domínio.



Bijetora: se ela for **sobrejetora** e **injetora** simultaneamente.

Injetora: **cada elemento** do domínio possuir uma **única e distinta** imagem.

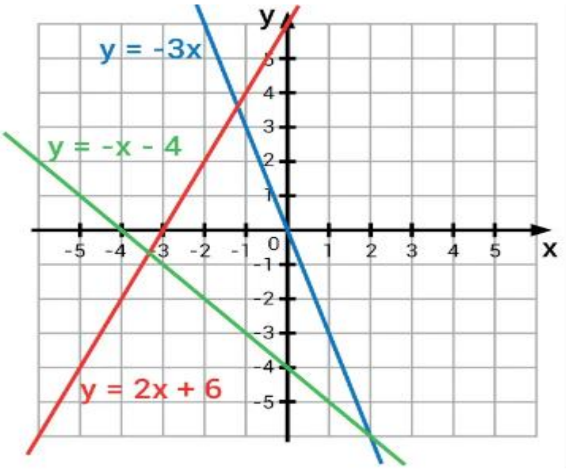


Simples: se ela **não é** injetora nem sobrejetora.

Tipos de funções e aplicações

Função Linear

Uma função da forma $f(x) \ = \ ax + b$, onde a e b são constantes e x é a variável independente. A constante a é chamada de coeficiente angular e b é o termo constante.



O gráfico de uma função linear é uma linha reta.

(Fonte: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/como-construir-grafico-uma-funcao.htm)

O zero de uma função, também conhecido como raiz ou solução da equação, é o valor da variável independente para o qual a função resulta em zero. Em outras palavras, é o ponto onde o gráfico da função cruza o eixo x. Para uma função linear, encontrar o zero significa determinar o valor da variável independente que faz com que a função resulte em zero.

Para calcular o zero da função linear, seguimos estes passos:

1) Escreva a função linear: $f(x) = ax + b$.

2) Substitua $f(x)$ por zero: $0 = ax + b$.

3) Isole a variável x: $ax = -b \ \rightarrow \ x: x = -b/a$

4) Calcule o valor de x: $x = -b/a$

Os coeficientes a e b na função $ax + b$ interferem na forma do gráfico dessa função.

Coeficiente a

O coeficiente a determina a inclinação da reta. Se a for positivo, a reta terá uma inclinação para cima da esquerda para a direita. Isso significa que à medida que x aumenta, y também aumenta. Por outro lado, se a for negativo, a reta terá uma inclinação para baixo da esquerda para a direita, indicando que à medida que x aumenta, y diminui. Quanto maior o valor absoluto de a, mais íngreme será a inclinação da reta. Se $a = 0$, a função se torna uma constante, resultando em uma linha horizontal.

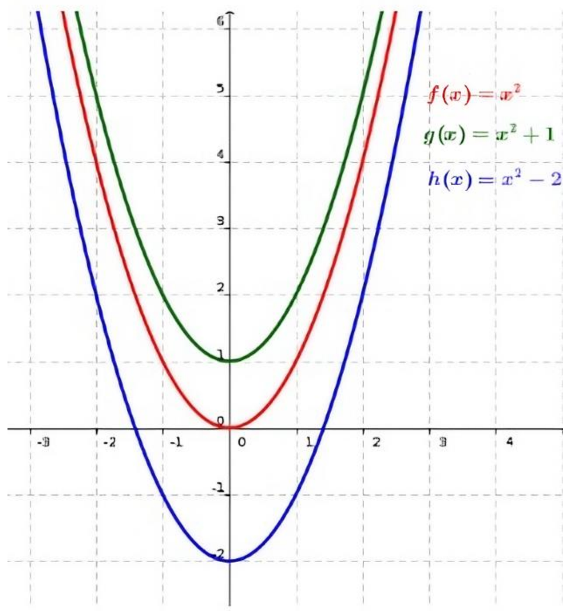
Coeficiente b

O coeficiente b determina o intercepto no eixo y, ou seja, o ponto onde a reta corta o eixo y. Se $b > 0$, o ponto de interceptação com o eixo y estará acima da origem, enquanto se $b < 0$, estará abaixo da origem. Se $b = 0$, a reta passa pela origem, resultando em um ponto de interceptação no eixo y igual a zero.

Exemplo: Considere a função $f(x) = 2x + 3$. Aqui, $a = 2$ e $b = 3$. Isso significa que a inclinação da reta é 2 e o intercepto no eixo y é 3. A raiz da função é igual a -1,5.

Função Quadrática

Uma função da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b, e c são constantes e a variável independente x tem um expoente de 2. O coeficiente a determina a concavidade da função quadrática. Quando $a > 0$, a concavidade da função é para cima. Quando $a < 0$, concavidade é para baixo.



https://pt.khanacademy.org/math/1-serie-oe-sao-paulo/x023d174e13cbc78d:3-bimestre-funcoes-aulas-5-a-8/x023d174e13cbc78d:aula-6-intermediario-funcao-polinomial-de-2-grau/a/grafico-de-uma-funcao-quadratica-via-transformacoes

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola.

Para calcular as raízes da função quadrática, seguimos estes passos:

1) Escreva a função linear: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

2) Resolva a equação conhecida como Báskara para encontrar as raízes: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

É importante mencionar que, em alguns casos, uma função quadrática pode não ter raízes reais. Isso ocorre quando o discriminante da equação quadrática, representado por $b^2 - 4ac$, é negativo. O discriminante determina o número e a natureza das raízes da equação quadrática.

Se o discriminante for negativo, significa que não há raízes reais para a função quadrática. Em outras palavras, o gráfico da função quadrática não intercepta o eixo x em nenhum ponto. Isso ocorre quando a parábola está completamente acima ou completamente abaixo do eixo x.

Se o descriminante $b^2 - 4ac$ for positivo, a equação quadrática terá duas raízes reais distintas. Isso significa que a parábola intersectará o eixo x em dois pontos diferentes. Graficamente, isso ocorre quando a parábola corta o eixo x em dois pontos diferentes.

Se o discriminante $b^2 - 4ac$ for igual a zero, a equação quadrática terá uma raiz real dupla. Isso significa que a parábola tocará o eixo x em um único ponto. Graficamente, isso ocorre quando a parábola tangencia o eixo x em um único ponto.

Uma informação importante extraída da função é o seu valor máximo ou mínimo, que é representado pelo vértice do gráfico da função. O vértice é o ponto onde a função atinge o seu extremo, podendo ser um máximo ou mínimo, dependendo da direção da concavidade da parábola.

O vértice de uma parábola representada pela função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é dado pelas coordenadas $(h, k), onde\ h = -\frac{b}{2a}$ e $k = f(h)$.

Os coeficientes a, b e c na função quadrática $ax^2 + bx + c$ desempenham papéis distintos que moldam a forma do gráfico dessa função.

Coeficiente a

O coeficiente a determina a concavidade da parábola. Se a for positivo, a parábola terá uma concavidade voltada para cima, significando existe um valor mínimo de y. Por outro lado, se a for negativo, a parábola terá uma concavidade voltada para baixo, e existe um valor máximo de y. Quanto maior o valor absoluto de a, mais "estreita" será a abertura da parábola.

Coeficiente b

O coeficiente b determina a posição horizontal do vértice da parábola e afeta a simetria da parábola em relação ao eixo vertical. Um valor positivo de b move o vértice para a esquerda, enquanto um valor negativo de b move o vértice para a direita.

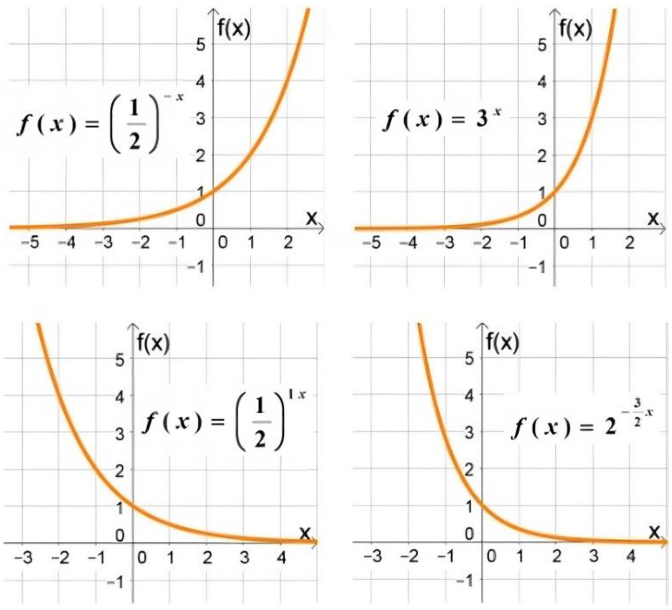
Coeficiente c

O coeficiente c determina a posição vertical da parábola, especificamente afetando o deslocamento vertical da parábola em relação ao eixo x.

Exemplo: Considere a função $f(x) = x^2 + 3x + 2$. Aqui, $a = 1$, $b = 3$ e $c = 2$. A concavidade da função é para cima ($a > 0$), possui duas raízes reais distintas (descriminante positivo), que são -1 e -2, e o vértice está localizado em $(-3/2, -1/4)$.

Função Exponencial

Uma função da forma $f(x) = a \cdot b^x$, onde a e b são constantes e b é maior que zero e diferente de um. O crescimento (ou decrescimento) da função é exponencial. Ou seja, a combinação dos coeficientes a e b determina se a função será crescente ou decrescente.



Este tipo de função é representativo dos estudos sobre os fenômenos biológicos, por exemplo.

Fonte: https://www.dicasdecalculo.com.br/funcoes

Ao contrário de algumas outras funções, a função exponencial não possui intercepto no eixo x. Isso ocorre porque a função exponencial é sempre positiva (ou zero em alguns pontos específicos), e nunca assume valores negativos. Como resultado, ela nunca cruza ou toca o eixo x.

Por outro lado, a função exponencial pode ter um intercepto no eixo y. O intercepto no eixo y ocorre quando $x = 0$. Para a função exponencial $f(x) = a \cdot b^x$, o valor de $f(0)$ é simplesmente a, que é o coeficiente de escala da função exponencial.

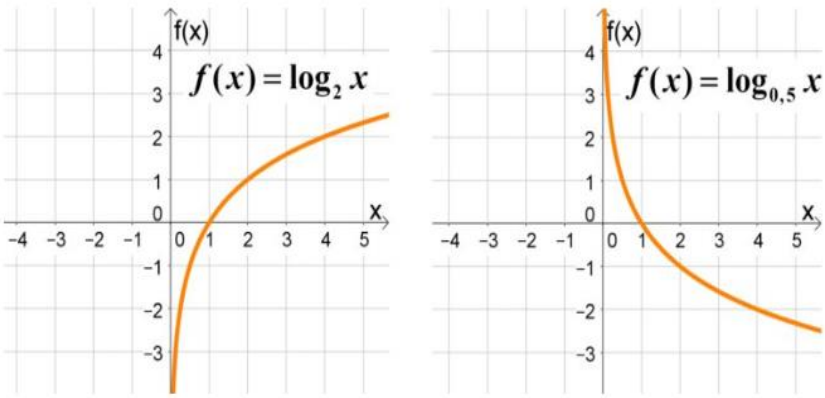
Exemplo: Considere a função $f(x) = 2 \cdot 3^x$. À medida que x aumenta, a função cresce exponencialmente. O intercepto no eixo y ocorre quando $x = 0$. Substituindo $x = 0$ na função, obtemos o valor de $f(0)$, que nos dará o intercepto no eixo y. Assim, o intercepto no eixo y é igual a 2.

Função Logarítmica

A função logarítmica, conhecida como a função inversa da função exponencial, é representada pela forma, onde b é a base do logaritmo. O logaritmo mede o expoente ao qual a base deve ser elevada para produzir um determinado valor.

O coeficiente b determina se a função será cresce $f(x) = log_b(x)$ nte ou decrescente:

- A função é crescente quando $b > 1$.
- A função é decrescente quando $0 < b < 1$.



Fonte: https://www.dicasdecalculo.com.br/funcoes

A função logarítmica intercepta o eixo x, mas geralmente não intercepta o eixo y.

O intercepto no eixo x ocorre quando $f(x) = 0$. Para a função logarítmica $f(x) = log_b(x)$, isso ocorre quando o argumento do logaritmo é igual a 1, pois $log_b(1) = 0$ para qualquer base $b > 0$. Portanto, o intercepto no eixo x ocorre em $x = 1$, independentemente da base b da função logarítmica.

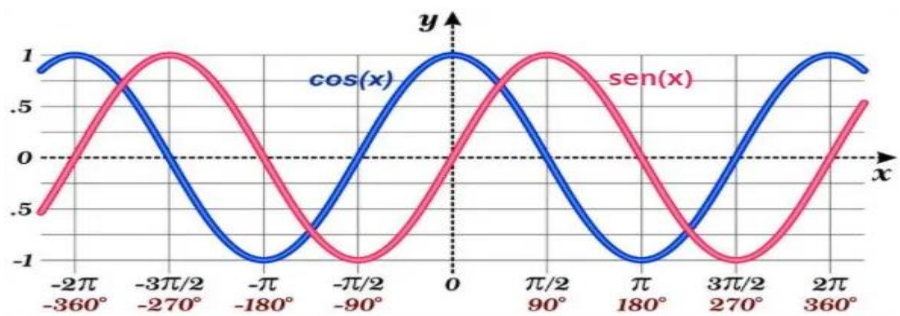
Geralmente, a função logarítmica não intercepta o eixo y. Isso ocorre porque o logaritmo de zero ou de números negativos não está definido nos números reais. No entanto, quando a base b é igual a 1, a função logarítmica torna-se uma função constante $f(x) = 0$, e o intercepto no eixo y é $y = 0$.

Exemplo: Considere a função $f(x) = log_2(x)$. Aqui, $b = 2$. O intercepto no eixo x ocorre quando $f(x) = 0$. Para a função logarítmica, isso ocorre quando o argumento do logaritmo é igual a 1.

Função Trigonométrica

As funções trigonométricas, como seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante, estão intrinsecamente ligadas aos ângulos em um triângulo e são fundamentais na matemática. Uma característica importante dessas funções é sua periodicidade, o que significa que elas se repetem em intervalos regulares ao longo do eixo horizontal. O período de uma função trigonométrica é o menor intervalo em que a função se repete.

Este conceito de período está intimamente relacionado aos ângulos. Considerando um círculo completo, que tem 2π radianos, as funções trigonométricas estão diretamente relacionadas aos comprimentos dos arcos em um círculo unitário. Essa conexão entre os ângulos e os valores das funções trigonométricas é essencial para entender seu comportamento e aplicação em diversas áreas da matemática e ciências aplicadas.



Fonte: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/funcoes-trigonometricas.htm

O seno de um ângulo em um triângulo retângulo é definido como a razão entre o comprimento do cateto oposto e a hipotenusa. O cosseno de um ângulo é definido como a razão entre o comprimento do cateto adjacente e a hipotenusa. Essas funções são periódicas, com período 2π (eixo x), e têm valores entre -1 e 1 (eixo y).

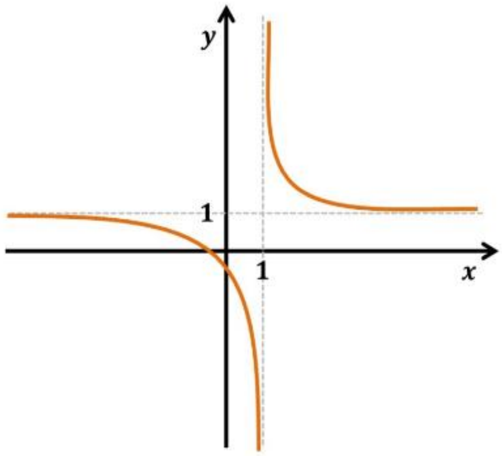
A tangente de um ângulo é definida como a razão entre o seno e o cosseno do ângulo. A cotangente é definida como o inverso da tangente. Essas funções também são periódicas, com período π, e podem assumir qualquer valor real.

A secante de um ângulo é o inverso do cosseno, e a cossecante é o inverso do seno. Elas são definidas como as razões entre a hipotenusa e o cateto adjacente, e a hipotenusa e o cateto oposto, respectivamente.

Vale ressaltar que as funções trigonométricas são estudadas não apenas em triângulos, mas também em círculos unitários e em problemas de movimento periódico, como oscilações, ondas e vibrações. Elas desempenham um papel fundamental na modelagem e na resolução de problemas em diversas áreas da ciência e engenharia.

Função Racional

Uma função da forma $f(x) = p(x)/q(x)$, onde $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios e $q(x)$ é diferente de zero.



Fonte: https://www.dicasdecalculo.com.br/funcoes

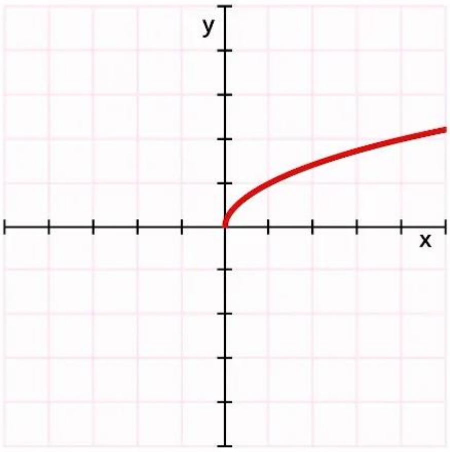
As funções racionais podem exibir uma variedade de comportamentos, incluindo assíntotas verticais, assíntotas horizontais e pontos de descontinuidade. Uma assíntota é como uma linha imaginária que uma função se aproxima continuamente, mas nunca chega a tocar. É como se a função estivesse sempre "seguindo" essa linha, mas nunca a alcançasse completamente.

As assíntotas verticais ocorrem onde o denominador se anula, resultando em valores infinitos ou indefinidos para a função. Já as assíntotas horizontais podem existir dependendo do grau dos polinômios no numerador e no denominador. Por fim, os pontos de descontinuidade podem surgir onde o denominador se anula, levando a uma divisão por zero. Esses pontos são cruciais para entendermos o comportamento das funções racionais em diferentes situações e nos ajudam a visualizar como a função se comporta em relação aos limites de seus valores.

Função Raiz Quadrada

A função raiz quadrada é uma representação matemática da operação de encontrar a raiz quadrada de um número. Basicamente, ela nos dá o número que, quando multiplicado por si mesmo, resulta no número original. Em termos simples, é o inverso da função quadrática.

Por exemplo, se tivermos $f(x) = \sqrt{x}$, ela nos dá o valor y tal que $y^2 = x$. Em outras palavras, a função raiz quadrada "desfaz" o efeito de elevar ao quadrado, vice-versa.

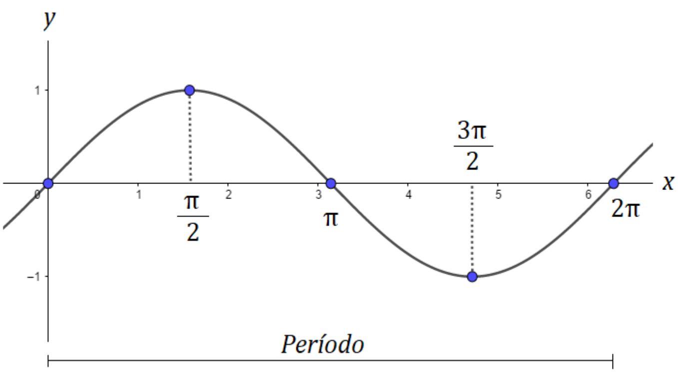


Fonte: https://www.preparaenem.com/matematica/funcao-raiz.htm

Dentro do contexto da função raiz quadrada, é importante abordar a questão dos números negativos. A função raiz quadrada tradicionalmente é definida apenas para números reais não negativos, pois a raiz quadrada de um número negativo não é um número real. Isso ocorre porque não há nenhum número real que, quando multiplicado por si mesmo, resulte em um número negativo.

Função Periódica

A função periódica, como o nome sugere, é uma função que repete seus valores em intervalos regulares. Além das funções trigonométricas como seno, cosseno e tangente, existem várias outras funções periódicas em matemática. Aqui estão alguns exemplos:

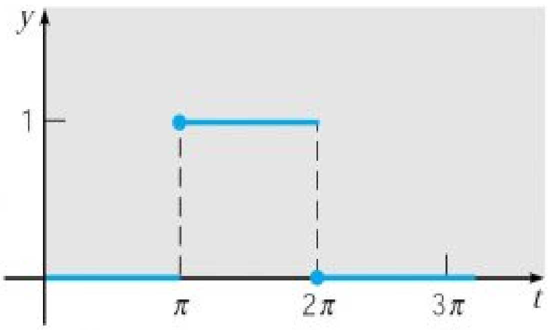


Fonte: https://www.infoescola.com/matematica/funcoes-trigonometricas/

- Função Quadrada: A função $f(x) = sign(sin(x))$ é periódica com um período de 2π. Ela retorna 1 se o seno de x for positivo e -1 se o seno de x for negativo.
- Função Dente de Serra: A $f(x) = x - [x]$, onde $[x]$ representa o maior inteiro não superior a x, é periódica com um período de 1.
- Função Quadrática Cúbica: A função $f(x) = x^3 - x$ é periódica com um período de 2.
- Função Modular: A função $f(x) = x\,mod(p)$, onde p é um número inteiro positivo, é periódica com um período de p. Ela retorna o resto da divisão de x por p.

Função Heaviside (Degrau Unitário)

É a função definida por partes que "salta" de um valor constante para outro em um ponto específico. São funções de considerável interesse nas mais diversas áreas da ciência, uma vez que podem ser empregadas nas soluções de equações diferenciais atreladas a modelagens de fenômenos descontínuos, assim, são frequentemente empregadas em engenharia elétrica, nos problemas que podem apresentar dualidade como “ligado” ou “desligado”.



Fonte: https://eletricacomscilab.blogspot.com/2017/09/funcao-degrau-unitario-o-que-e-funcao.html (Adaptado)

Função Logística

A função logística, também conhecida como curva logística ou curva em forma de S ou função sigmoide, é um tipo de função que descreve o crescimento ou a diminuição de uma quantidade ao longo do tempo. Ela é frequentemente usada em modelos matemáticos para representar o crescimento de populações, a difusão de inovações, a propagação de doenças, entre outros fenômenos.

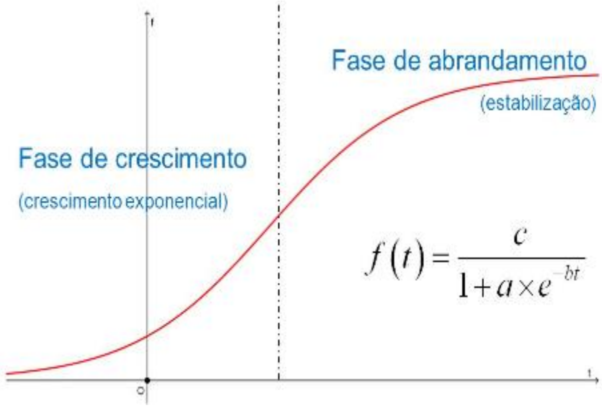
A forma geral da função logística é dada por:

$$f(x) = \frac{L}{1 + e^{-kx=(x-x_0)}}$$

Onde:

- L é o limite superior ou a capacidade máxima que a quantidade pode atingir (por exemplo, a capacidade máxima de uma população);
- k é a taxa de crescimento, que controla o quão rápido a quantidade cresce (ou diminui);
- x_0 é o ponto médio da curva, onde ocorre a inflexão;

- e é a base do logaritmo natural (aproximadamente 2.71828).



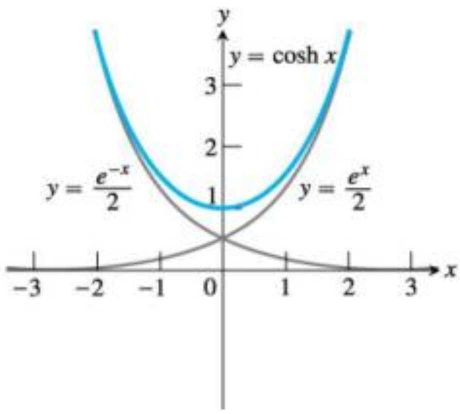
Fonte: https://slideplayer.com.br/slide/9965703/

A função logística tem várias características importantes:

- Crescimento Exponencial Inicial: Inicialmente, a função logística exibe um crescimento exponencial rápido à medida que x aumenta.
- Crescimento Assintótico: Conforme x continua aumentando, a função se aproxima assintoticamente do limite superior L, mas nunca o ultrapassa.
- Ponto de Inflexão: O ponto x_0 é o ponto médio da curva logística, onde ocorre uma mudança na taxa de crescimento. Antes de x_0, a função está crescendo de forma acelerada; após x_0, o crescimento desacelera gradualmente.
- Estabilidade: A função logística é estável ao longo do tempo e tem propriedades previsíveis, o que a torna útil para modelar muitos fenômenos naturais e sociais.

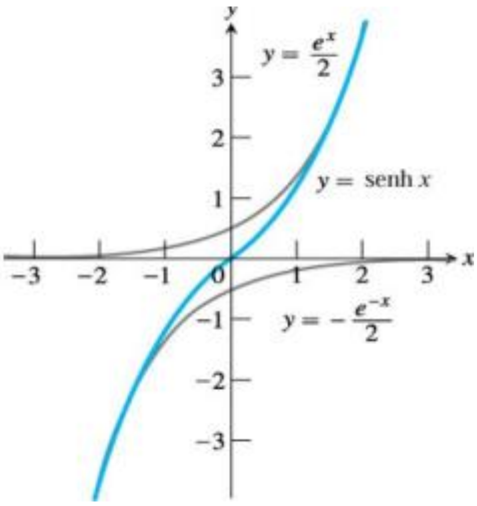
Função Hiperbólica

As funções hiperbólicas, como o seno hiperbólico, o cosseno hiperbólico e a tangente hiperbólica, são similares às funções trigonométricas, mas são definidas em termos de exponenciais.



Cosseno hiperbólico

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

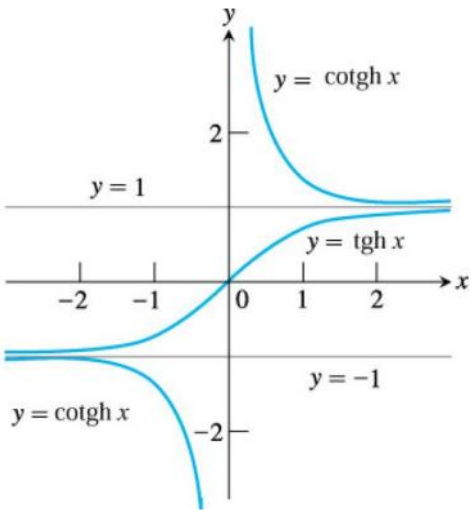


Seno hiperbólico

$$\text{senh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

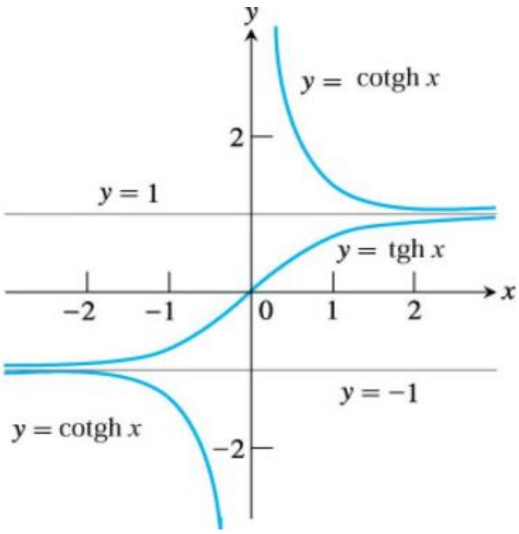
Fonte: https://www.feis.unesp.br/Home/departamentos/engenhariaeletrica/lepnovo/materialdosalunos/funcoes-hiperbolicas.pdf

Assim como as funções trigonométricas, as funções hiperbólicas também têm gráficos suaves e simétricos, e são úteis na modelagem de uma ampla gama de fenômenos físicos e matemáticos. Por exemplo, elas são frequentemente usadas em mecânica quântica, teoria das cordas, teoria das probabilidades, entre outras áreas.



Tangente hiperbólica

$$\text{tgh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$



Cotangente hiperbólica

$$\operatorname{cotgh} x = \frac{1}{\operatorname{tgh} x} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$$

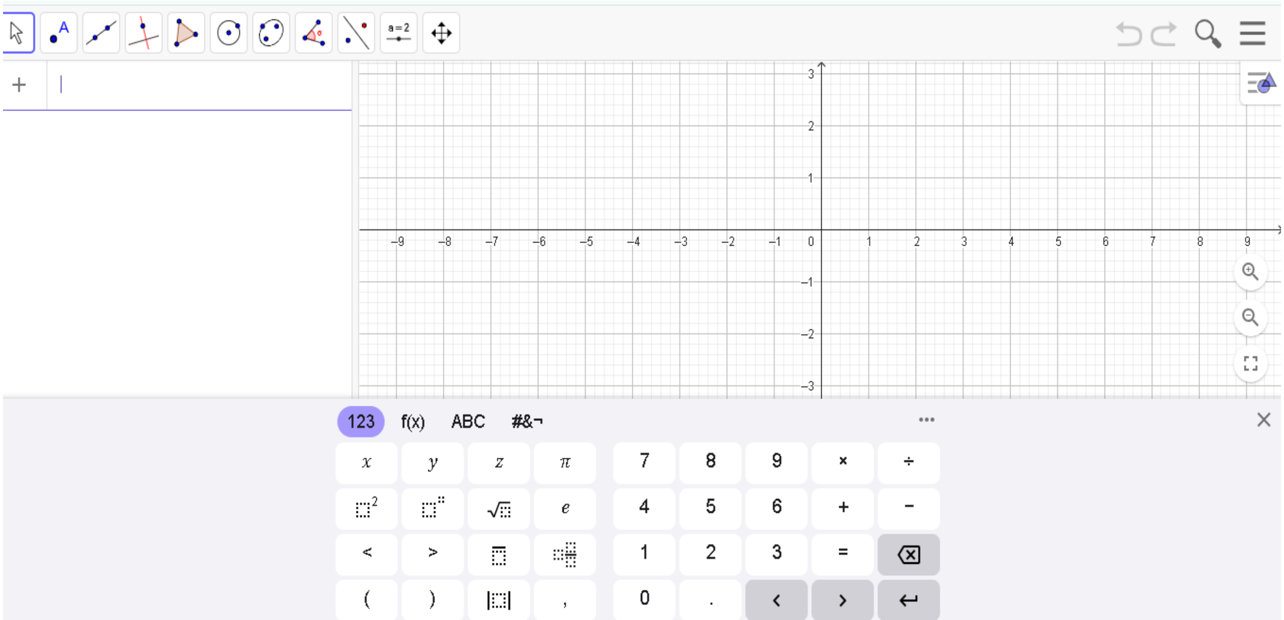
Fonte: https://www.feis.unesp.br/Home/departamentos/engenhariaeletrica/lepnovo/materialdosalunos/funcoes-hiperbolicas.pdf


Pausa para reflexão!

Já ouviu falar do GeoGebra?

GeoGebra é um software dinâmico de matemática para todos os níveis de educação que reúne geometria, álgebra, planilhas, ***gráficos****, estatísticas e cálculos em uma única plataforma. Ao acessá-lo, pode-se interagir de forma intuitiva na construção dos gráficos das funções, a partir de suas propriedades e características.*

GeoGebra:



Fonte: https://www.geogebra.org/about

Você pode praticar a construção de gráficos das funções apresentadas, acessando em:
https://www.geogebra.org//

Aplicabilidade das Funções Matemáticas em Problemas Ambientais

As funções matemáticas desempenham um papel fundamental na compreensão e na resolução de problemas ambientais complexos. Elas oferecem ferramentas poderosas para modelar e analisar uma ampla gama de fenômenos naturais, permitindo aos cientistas ambientais e aos pesquisadores prever tendências, avaliar impactos e formular estratégias de manejo sustentável.

Vamos explorar alguns exemplos de como as funções matemáticas são aplicadas em contextos ambientais:

- Modelagem de Ciclos Biogeoquímicos: As funções exponenciais são frequentemente empregadas na modelagem de ciclos biogeoquímicos, como o ciclo do carbono, o ciclo do nitrogênio e o ciclo da água. Elas ajudam a descrever as taxas de decomposição de matéria orgânica, a fixação de nutrientes pelos organismos e a transferência de elementos entre diferentes compartimentos ambientais.
- Predição de Impactos de Mudanças Climáticas: As funções trigonométricas são utilizadas na análise de séries temporais climáticas para prever padrões sazonais, como variações de temperatura e padrões de precipitação. Elas ajudam os cientistas a entender melhor os efeitos das mudanças climáticas sobre os ecossistemas, a agricultura e os recursos hídricos.
- Modelagem de Dinâmica de Populações: Além do crescimento populacional, as funções logísticas são aplicadas na modelagem da dinâmica de populações de espécies animais e vegetais. Isso inclui a previsão de padrões de migração, a distribuição de habitats e a interação entre espécies em ecossistemas complexos.
- Análise de Poluição Atmosférica: As funções logarítmicas são utilizadas na análise de dados de qualidade do ar para avaliar a concentração de poluentes atmosféricos, como partículas finas, ozônio e dióxido de enxofre. Elas ajudam os pesquisadores a identificar fontes de poluição, a avaliar os impactos na saúde humana e a desenvolver estratégias de controle da poluição.
- Estimativa de Taxas de Erosão do Solo: As funções hiperbólicas são empregadas na modelagem de processos de erosão do solo, ajudando a prever taxas de desgaste do solo em diferentes condições climáticas e de uso da terra. Isso é importante para a conservação dos solos agrícolas e naturais e para a prevenção da degradação ambiental.

Referências

BATSCHELET, E. Introdução à matemática para biocientistas. Trad. Vera Maria Abud Pacífico da Silva e Junia Maria Penteado de Araújo Quitete. São Paulo: Universidade de São Paulo. 1978.

GUIDORIZZI, H. L. Um curso de cálculo. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, c2009. v.1. 635 p.

IEZZI, G. Fundamentos de matemática elementar, 1: conjuntos. São Paulo: Atual, 2013. 420p.

TAXA DE VARIAÇÃO

O que é uma Taxa de Variação?

A taxa de variação, em termos gerais, refere-se à medida da mudança em uma quantidade em relação à mudança em outra quantidade.

Pode ser expressa como a razão entre a mudança em uma variável e a mudança correspondente em outra variável.

Na matemática, a taxa de variação é frequentemente associada ao conceito de derivada.

Fonte: Pixabay

Se você tem uma função que descreve a relação entre duas variáveis, a derivada dessa função em um determinado ponto representa a taxa instantânea de variação da função nesse ponto. Em outras palavras, é a inclinação da reta tangente à curva da função nesse ponto. Neste capítulo vamos verificar isso!

Taxa Média de Variação (TMV)

A taxa média de variação é uma medida que descreve a taxa de mudança média de uma variável em relação a outra ao longo de um intervalo específico.

A fórmula geral para a TMV no intervalo entre $a \leq x \leq b$ em uma função $f(x)$ é dada por:

$$f(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

A taxa média de variação diz-nos quanto a função variou por uma unidade de tempo, ao longo de um intervalo específico.

Ela tem muitas aplicações no mundo real...

Por exemplo, se tivermos uma função que representa a posição de um objeto em relação ao tempo, a taxa média de variação entre dois momentos específicos seria a média da velocidade durante esse intervalo de tempo.

Portanto, a taxa média de variação fornece uma medida da inclinação média da linha secante que passa por dois pontos no gráfico da função.

Pausa para reflexão!

Vamos verificar outras situações sobre a TMV? Por exemplo, como calculamos a Taxa média de variação a partir de um gráfico?

Temos um exemplo da Khan Academy, em português. Acesse o link:
https://www.youtube.com/watch?v=S0uyP8nNfwU

Agora, vamos verificar a taxa de variação média de uma função a partir de uma tabela! Acesse o link:
https://www.youtube.com/watch?v=RhWY2vjo1wE

Taxa de Variação Instantânea (TVI)

A taxa de variação instantânea está relacionada ao conceito de **derivada de uma função** para o cálculo diferencial.

*A derivada é entendida como a **inclinação da reta tangente** a uma curva em um dado ponto desta curva.*

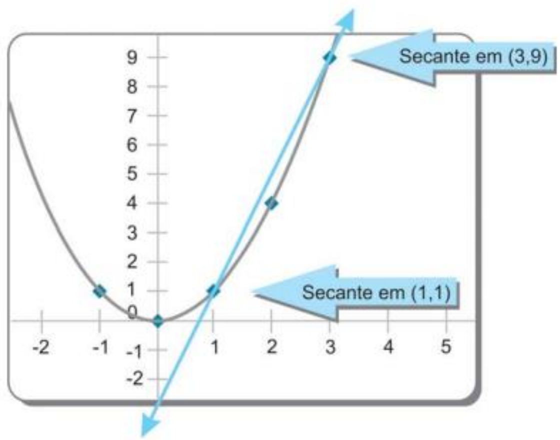
Enquanto a taxa média de variação representa a taxa de mudança média de uma variável em relação a outra ao longo de um intervalo, a TVI fornece a taxa de variação em um ponto específico da função, ou seja, a **inclinação da reta tangente na curva**.

O que é uma Taxa de Variação?

A taxa de variação, em termos gerais, refere-se à medida da mudança em uma quantidade em relação à mudança em outra quantidade.
Pode ser expressa como a razão entre a mudança em uma variável e a mudança correspondente em outra variável.
Na matemática, a taxa de variação é frequentemente associada ao conceito de derivada.
Se você tem uma função que descreve a relação entre duas variáveis, a derivada dessa função em um determinado ponto representa a taxa instantânea de variação da função nesse ponto. Em outras palavras, é a inclinação da reta tangente à curva da função nesse ponto. Neste capítulo vamos verificar isso!

Fonte: Pixabay

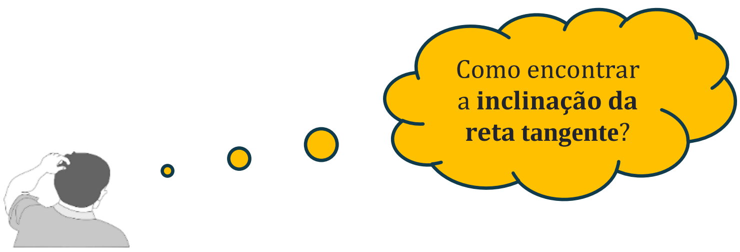
Para visualizar melhor, veja as seguintes representações gráficas:



Para encontrar a inclinação da **reta secante** na função $f(x) = x^2$, temos que verificar os pontos de interseção indicados em (3,9) e (1,1).

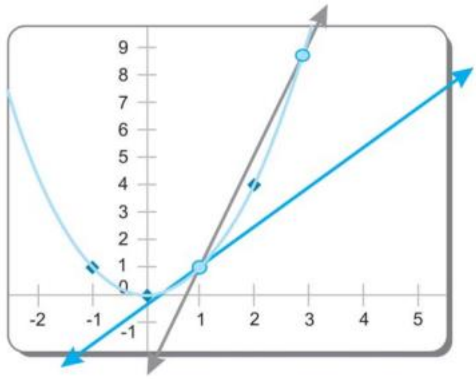
$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{9 - 1}{3 - 1} = \frac{8}{2} = 4$$

Logo, a inclinação da reta secante a $f(x) = x^2$ é igual a 4.



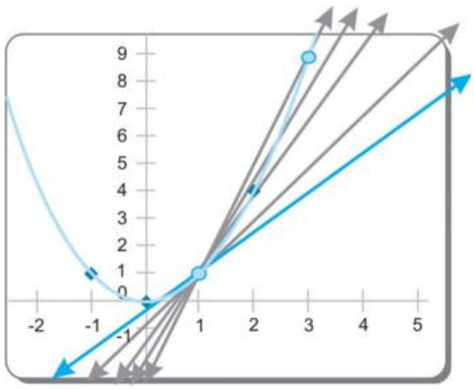
Fonte: Pixabay

Primeiramente, note o que acontece quando diminuímos cada vez mais a distância entre $x = 3$ e $x = 1$.

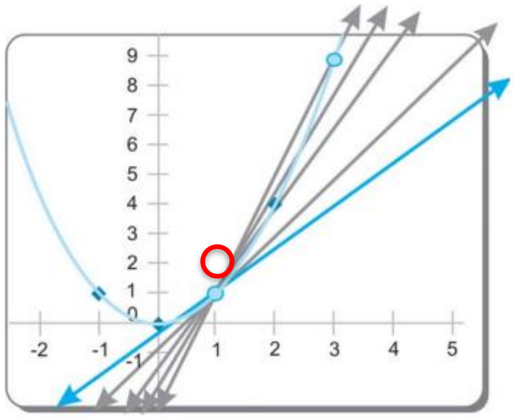


Teoricamente, repetindo esse processo várias vezes...

Cada vez mais, a inclinação da reta secante se aproxima mais e mais da **inclinação da reta tangente**.



Isso nos permite dizer que a **distância entre os valores de x** na tangente e na secante móvel irá eventualmente diminuir/desaparecer, pois estará na mesma localização, conforme o gráfico:



E quando a distância entre os valores fosse quase zero? Não podemos dividir por zero, certo? Então o que fazer?

Poderemos encontrar a inclinação da reta tangente se obtivermos o **limite** da secante móvel quando se aproxima da tangente. Então, teremos, a inclinação da reta tangente!

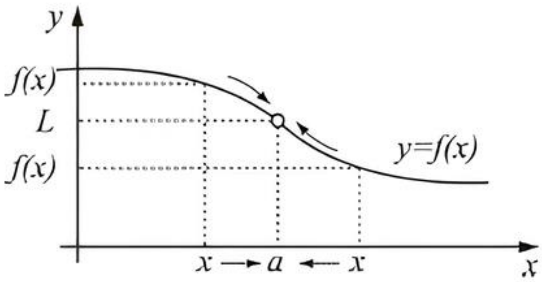
Limite

Formalmente, podemos dizer que o limite de uma função $f(x)$, à medida que x se aproxima de $\boldsymbol{L}$, ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, se, para qualquer número real pequeno $\epsilon > 0$, existe um número real pequeno $\delta > 0$ tal que, se $0 < | x - a | < \delta$, então $| f(x) - L | < \epsilon$.

Em termos mais simples, isso significa que à medida que a variável $\boldsymbol{x}$ se aproxima de $\boldsymbol{a}$, os valores de $\boldsymbol{f(x)}$ se aproximam de $\boldsymbol{L}$ tão de perto quanto quisermos, desde que $\boldsymbol{x}$ esteja suficientemente próximo de $\boldsymbol{a}$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Graficamente, isso pode ser representado por uma curva que se aproxima de um determinado valor, à medida que a variável independente se aproxima de um ponto específico no eixo x.



Propriedades dos Limites de Funções

Sejam as funções $\boldsymbol{f(x)}$ e $\boldsymbol{g(x)}$, definidas em certo domínio D, tais que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \text{ e } \lim_{x \to a} g(x) = L$$

Limite de uma constante: limite de uma constante é a própria constante.

$$\lim_{x \to a} k = k$$

Limite da soma: limite da soma de duas funções é a soma dos limites dessas funções

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L + M$$

Limite da diferença: limite da diferença de duas funções é a diferença dos limites dessas funções.

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = L - M$$

Limite do produto: limite do produto de duas funções é o produto dos limites dessas funções.

$$\lim_{x \to a} [f(x). g(x)] = \lim_{x \to a} f(x). \lim_{x \to a} g(x) = L. M$$

Limite do quociente: limite do quociente de duas funções é o quociente dos limites dessas funções, desde que o denominador seja diferente de zero.

$$\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \frac{L}{M}$$

Limite de uma potência: limite de uma potência enésima de uma função é igual à potência enésima do limite.

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = (\lim_{x \to a} f(x))^n = L^n, n \in N$$

Limite da raiz: limite da raiz enésima de uma função é igual à raiz enésima do limite dessa função.

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}, n \in N$$

Existem vários tipos de limites, como limites laterais (limite à medida que $\boldsymbol{x}$ se aproxima de $\boldsymbol{a}$ por valores à esquerda ou à direita de $\boldsymbol{a}$); limites infinitos (quando a função se aproxima de infinito ou menos infinito); e, limites no infinito (quando $\boldsymbol{x}$ se aproxima de infinito ou menos infinito).

Limites Laterais

Se "x" se aproxima de "a" por meio de valores maiores que "a" ou pela sua direita, expressa-se por **limite lateral à direita de "$\boldsymbol{a}$"**:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = b$$

Se "x" se aproxima de "a" por meio de valores menores que "a" ou pela sua esquerda, expressa-se por limite lateral à esquerda de "a":

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = c$$

O limite de $f(x)$ para $x \to a$ existe se, e somente se, os limites laterais à direita e à esquerda são iguais. Se,

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = b$$

E, se,

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \neq \lim_{x \to a^-} f(x)$$

Então não existe,

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

Limites Infinitos: funções cujos valores aumentam ou diminuem sem limitação, quando a variável independente se aproxima cada vez mais de um número fixo.

Quando x tende a "mais" infinito

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

Seja f uma função e a um ponto que pertence ao intervalo $]a, +\infty[$, contido no domínio de f. Para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, com $\delta > a$ tal que:

$$x > \delta \to L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

Quando x tende a “menos” infinito

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Seja f uma função e a um ponto que pertence ao intervalo $]-\infty, a[$, contido no domínio de f. Para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, com $-\delta < a$ tal que:

$$x < -\delta \to L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

Um exemplo prático de limites

Suponha que estamos estudando o crescimento de uma população de animais em um habitat natural. O modelo clássico para o crescimento populacional é o modelo de crescimento exponencial. O modelo de crescimento exponencial é frequentemente expresso pela equação:

$$P(t) = P_0 \cdot e^{rt}$$

Onde:
$P(t)$ é o tamanho da população no tempo t,
$P0$ é o tamanho inicial da população no tempo $t = 0$,
r é a taxa de crescimento intrínseca da população, e
e é a base do logaritmo natural.
Se estamos interessados em determinar o que acontece com o tamanho da população conforme o tempo se aproxima do infinito, estamos calculando o limite do tamanho da população quando t tende ao infinito:

$$\lim_{t \to \infty} P(t) = l\lim_{t \to \infty} P_0 \cdot e^{rt}$$

Este limite nos dará uma ideia do tamanho máximo que a população pode atingir no longo prazo sob as condições dadas de crescimento, o que é importante para entender a dinâmica das populações em ecossistemas naturais e para o desenvolvimento de estratégias de conservação e manejo.

Aplicações em Ciências Ambientais

A taxa de variação é uma ferramenta poderosa para analisar mudanças em sistemas ambientais ao longo do tempo ou em relação a outras variáveis. Aqui estão alguns exemplos de como a taxa de variação é aplicada em ciências ambientais:

- Taxa de crescimento populacional: Em ecologia, podemos usar a taxa de variação para analisar como o tamanho de uma população varia ao longo do tempo. Por exemplo, podemos calcular a taxa de variação da população de uma espécie em relação ao tempo para entender se ela está crescendo, diminuindo ou se mantendo estável em um determinado ambiente.
- Taxa de erosão do solo: Em estudos de conservação do solo, a taxa de variação pode ser usada para analisar como a erosão do solo muda em resposta a diferentes práticas agrícolas ou condições climáticas. Ao calcular a taxa de variação da quantidade de solo erodido em relação ao tempo, podemos identificar práticas agrícolas sustentáveis que minimizam a erosão.
- Taxa de acidificação dos oceanos: Na oceanografia, a taxa de variação é fundamental para entender como a acidez dos oceanos está mudando devido às emissões de dióxido de carbono. Ao calcular a taxa de variação do pH da água do mar em relação ao tempo, podemos prever os impactos da acidificação dos oceanos na vida marinha e nos ecossistemas costeiros.
- Taxa de desmatamento: Em estudos de conservação florestal, a taxa de variação pode ser utilizada para analisar como a área de floresta desmatada muda ao longo do tempo. Ao calcular a taxa de variação da área desmatada em relação ao tempo, os pesquisadores podem identificar regiões com altas taxas de desmatamento e desenvolver estratégias de conservação mais eficazes.

- Taxa de derretimento de geleiras: Em glaciologia, a taxa de variação é fundamental para entender como as geleiras estão respondendo às mudanças climáticas. Ao calcular a taxa de variação do volume de gelo das geleiras em relação ao tempo, os cientistas podem prever o ritmo do derretimento e seus impactos no aumento do nível do mar e no abastecimento de água.
- Taxa de degradabilidade de materiais: Em estudos de poluição ambiental, a taxa de variação pode ser usada para analisar a degradação de materiais poluentes no ambiente. Por exemplo, ao calcular a taxa de variação da concentração de poluentes no solo ou na água em relação ao tempo, os pesquisadores podem avaliar a eficácia de medidas de remediação ambiental e mitigação da poluição.
- Taxa de aquecimento global: Em climatologia, a taxa de variação é essencial para monitorar o aquecimento global e suas consequências. Ao calcular a taxa de variação da temperatura média global da superfície da Terra em relação ao tempo, os cientistas podem identificar tendências de aquecimento e entender melhor os padrões climáticos regionais e globais.

Esses exemplos demonstram como a taxa de variação é uma ferramenta versátil e poderosa para analisar uma ampla gama de processos ambientais e desenvolver estratégias de gestão e conservação sustentáveis. Ao aplicar os princípios do cálculo, os cientistas podem obter informações valiosas para enfrentar os desafios ambientais contemporâneos e promover a sustentabilidade do nosso planeta.


Pausa para reflexão!

Como interpretar limites no infinito de funções racionais?
Observe o estudo de limites , quando x tende a +, acessando o link: https://pt.khanacademy.org/math/calculus-all-old/limits-and-continuity-calc/limits-at-infinity-calc/v/limits-at-positive-and-negative-infinity

Referências

BATSCHELET, E. Introdução à matemática para biocientistas. Trad. Vera Maria Abud Pacífico da Silva e Junia Maria Penteado de Araújo Quitete. São Paulo: Universidade de São Paulo. 1978.

GUIDORIZZI, H. L. Um curso de cálculo. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, c2009. v.1. 635 p.

HOFFMANN, Laurence D. Cálculo: um curso moderno e suas aplicações. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos , 1999.

PISKUNOV, N. Cálculo Diferencial e Integral: Volume 1. Moscou: Editora Mir, 1977.

CALCULO DIFERENCIAL

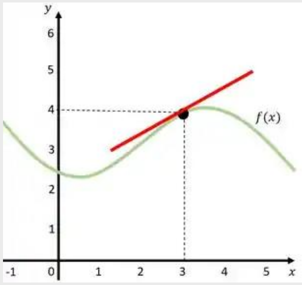
O que é Cálculo Diferencial?

O cálculo diferencial estuda as **taxas de variação**, cujo objeto de estudo é a **derivada de uma função**. A derivada de uma função em um dado valor de entrada descreve a taxa de mudança da função perto desse valor. Assim, o processo de encontrar uma derivada é chamado de **diferenciação**.

Derivada de uma função no ponto:

A derivada de uma função em um ponto específico mede **a taxa de variação instantânea da função** nesse ponto. Em termos mais simples, a derivada indica o quão rapidamente a função está mudando em torno desse ponto específico!

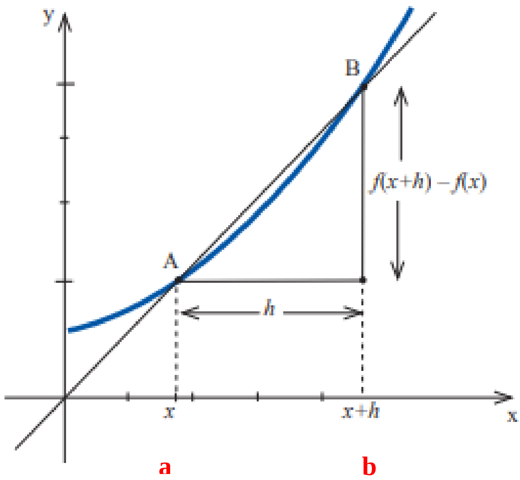
Geometricamente, a derivada em um ponto representa **a inclinação da reta tangente** à curva da função nesse ponto:



Representação da Derivada

A derivada de uma função $f(x)$ em relação a $\boldsymbol{x}$ no ponto $x = a$ é indicada por $f'(a)$ e é calculada usando o conceito de limite. Então,

Seja Taxa média de variação de f no intervalo $[x, x + h]$, sendo $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h} = \boldsymbol{b}$:



Fazendo as substituições a partir do gráfico, temos:

$$f = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Seja $y = f(x)$ uma função com domínio D. A função derivada de f, denotada por f', é definida por

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

desde que seja possível calcular o limite.

Regras Básicas de Derivação

Regra 1 – x^n

Se $y = f(x) = x^n$, na qual n é um número inteiro e positivo, então $f'(x) = nx^{n-1}$.

Exemplo 1: se $f(x) = x^2$, então, sua derivada $f'(x) = 2x$.

Exemplo 2: se $f(x) = x^2 - 3x$, então, sua derivada $f'(x) = 2x - 3$.

Se uma função for constante, $f(x) = c$?

Vamos verificar primeiro a taxa média de variação de f em um ponto x. Pela fórmula, temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{c - c}{h} = \frac{0}{h} = 0.$$

Nesse caso, ela já resultou em um valor constante, que é 0. Portanto, se $f(x) = c$, então sua derivada $f'(x) = 0$. Esse resultado já era esperado, uma vez que a variação de uma função constante é mesmo nula.

Regra 2 – constante

Se $f(x) = c$ (constante), então $f'(x) = 0$, como visto anteriormente.

Exemplo: se $f(x) = 1.539$, então, sua derivada $f'(x) = 0$.

E, se função for multiplicada por constante, sendo esta constante, $g(x) = c.f(x)$?

A expressão da taxa média de variação é:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{c.f(x+h)-c.f(x)}{h}=\frac{c[f(x+h)-f(x)]}{h}=c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

O próximo passo para o cálculo de g′(x) é calcular o limite do quociente anterior quando h→ 0. Observe que a constante **c** está multiplicando a taxa média de variação da função f.

$$\lim_{h\to 0}\left[c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]=c.\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Regra 3 – constante multiplicando uma função

Se c é um constante e $f(x)$ é uma função, então

$$\frac{d}{dx}[c.f(x)]=c.\frac{d}{dx}[f(x)],$$

para todo x no qual f tem uma derivada.

Exemplo: se $f(x)\frac{1}{3}x^2$, então, sua derivada $f'(x)=\frac{1}{3}.2x\ =\frac{2}{3}x$.

E, se função for somada a outra função, $g(x)\ +\ f(x)$?

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções quaisquer. Vamos calcular a derivada da soma e subtração de f e g, isto é, vamos derivar a função $S(x)\ =\ f\ (x)\ +\ g(x)$ e $D(x)\ =\ f\ (x)\ -\ g(x)$. Primeiramente, vamos escrever a taxa de variação:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{S(x+h)-S(x)}{h}=\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h}.$$

O próximo passo é reorganizar as variáveis no numerador, daí temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

Agora, o próximo passo é o cálculo de $S'(x)$, quando o limite $h\to\ 0$.

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

Observe que temos a soma entre as taxas médias de variação de f e de g. De modo semelhante, teremos para a função $D(x)\ =\ f\ (x)\ -\ g(x)$. Então, chegamos a seguinte proposição:

Regra 4 – soma ou subtração de funções

Se $f(x)$ e $g(x)$ são duas funções, então

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] \pm \frac{d}{dx}[g(x)]$$

para todo x no qual f e g têm uma derivada.

Exemplo: se $f(x) = \frac{1}{3}(x^2) + 5x - 6$, então, sua derivada $f'(x) = \frac{1}{3}\, 2x + 5 - 0 = \frac{2}{3}x + 5$.

E quando a função for uma poligonal de diferentes graus, como no exemplo abaixo?

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

A partir da **Regra 4**, temos:

$$p'(x) = \frac{d}{dx}[a_nx^n] + \frac{d}{dx}[a_{n-1}x^{n-1}] + \cdots + \frac{d}{dx}[a_2x^2] + \frac{d}{dx}[a_1x] + \frac{d}{dx}[a_0]$$

Utilizando a **Regra 3**, na expressão anterior, temos:

$$p'(x) = a_n\frac{d}{dx}[x^n] + a_{n-1}\frac{d}{dx}[x^{n-1}] + \cdots + a_2\frac{d}{dx}[x^2] + a_1\frac{d}{dx}[x] + \frac{d}{dx}[a_0]$$

Por fim, chegamos a:

$$p'(x) = na_n[x^{n-1}] + (n-1)a_{n-1}[x^{n-2}] + \cdots + 2a_2[x] + a_1$$

Regra 5 – polinômio

Se $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ é uma função polinomial, então sua derivada é $p'(x) = na_n[x^{n-1}] + (n-1)a_{n-1}[x^{n-2}] + \cdots + 2a_2[x] + a_1$.

Exemplo: se $f(x) = 3x^4 - x^3 - 4x^2 + 10x - 7$, então, sua derivada $f'(x) = 12x^3 - 3x^2 - 8x + 10$.

Regra 6 – produto de funções

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções diferenciáveis, então a derivada do produto $h(x) = f(x).g(x)$ é dada por:

$$h'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

Exemplo: se $f(x) = x^2$ e $g(x) = 3x$, então a derivada de $h(x) = f(x).g(x)$ é $h'(x) = 9x^2$.

Regra 7 – divisão de funções

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções diferenciáveis, então a derivada do produto $h(x) = f(x)/g(x)$ é dada por:

$$h'(x) \ = \frac{f'(x).\, g(x) - f(x).\, g'(x)}{(g(x))^2}$$

Exemplo: se $f(x) \ = \ x^2$ e $g(x) = 2x$, então a derivada de $h(x) \ = f(x)/g(x)$ é $h\,'(x) \ = \ 1/2$.

Por fim, chegamos a:

Regra 8 – cadeia de funções

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções diferenciáveis, então a derivada do produto $h(x) = f(g(x))$ é dada por:

$$h'(x) \ = \ f'(g(x)).\, g'(x)$$

Exemplo: Considere a função $h(x) = (2x + 1)^3$. Vamos calcular sua derivada usando a regra da cadeia.

Primeiro, identificamos a função externa u e a função interna v:

$$u = 2x + 1$$

$$v = u^3$$

Agora, calculamos as derivadas parciais de u e v:

$$\frac{du}{dx} = \frac{d(2x + 1) = 2}{dx}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{d(u^3) = 3u^2}{du}$$

Usando a regra da cadeia, a derivada de $f(x)$ em relação a x é dada por:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{dv}{du} . \frac{du}{dx}$$

Substituindo u e v nas derivadas:

$$\frac{dh}{dx} = 3u^2 .\, 2$$

Agora, substituímos u de volta na expressão:

$$\frac{dh}{dx} = 3(2x + 1)^2 .\, 2$$

Simplificando, obtemos:

$$\frac{dh}{dx} = 6(2x + 1)^2$$

Derivações de funções comuns

Ao estudar cálculo diferencial, uma ferramenta valiosa para simplificar o processo de derivação é o conhecimento das derivadas tabeladas de algumas funções comuns. Essas derivadas tabeladas são derivadas de funções elementares que foram previamente calculadas e são amplamente utilizadas em problemas de cálculo. Ao invés de derivar repetidamente essas funções, podemos simplesmente consultar as derivadas tabeladas, o que economiza tempo e esforço.

Função exponencial

A derivada da função exponencial e^x é e^x. Por exemplo, se tivermos a função $f(x) = e^{2x}$, sua derivada será $f'(x) = 2e^{2x}$.

Função Logarítmica

A derivada da função logarítmica $ln(x)$ é $1/x$. Por exemplo, se $f(x) = ln(3x)$, sua derivada será $f'(x) = 1/3x$.

Função Seno

A derivada da função seno $sin(x)$ é $cos(x)$. Se $f(x) = sin(2x)$, então $f'(x) = 2cos(2x)$.

Função Cosseno

A derivada da função cosseno $cos(x)$ é $-sen(x)$. Se $f(x) = cos(3x)$, então $f'(x) = -3sen(3x)$.

Sobre as regras de derivação visite o site:
https://pt.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-differentiation-2-new/ab-3-5a/a/review-categorizing-functions-for-taking-derivatives

Derivadas de Ordem Superior

Derivadas de ordem superior referem-se às derivadas de uma função que são derivadas de uma derivada anterior. Vamos explorar como calcular derivadas de ordens superiores usando as regras básicas de derivação.

A derivada de segunda ordem de uma função $f(x)$, denotada por $f''(x)$ ou d^2f/dx^2, é a derivada da primeira derivada de $f(x)$. Em outras palavras, é a taxa de variação da taxa de variação original.

Para calcular a derivada de segunda ordem, basta aplicar as regras de derivação à primeira derivada resultante. Por exemplo, se $f'(x)$ é a primeira derivada de $f(x)$, então $f''(x)$ é a derivada de $f'(x)$.

Da mesma forma, podemos calcular derivadas de ordem superior para ordens maiores do que dois. A derivada de ordem n de uma função $f(x)$, denotada $f^{(n)}(x)$ ou d^nf/dx^n, é a derivada da derivada de ordem $(n-1)$ de $f(x)$.

Para calcular derivadas de ordens superiores, repetimos o processo de derivação n vezes, aplicando as regras de derivação a cada iteração. Por exemplo, se $f^{(n-1)}(x)$ é a derivada de ordem $(n-1)$ de $f(x)$, então $f^{(n)}(x)$ é a derivada de $f^{(n-1)}(x)$.

Exemplo:

Vamos considerar a função $f(x) = x^3$ e calcular suas derivadas de ordem superior.

1. Primeira derivada: $f'(x) = 3x^2$
2. Segunda derivada: $f''(x) = 6x$
3. Terceira derivada: $f'''(x) = 6$
4. Quarta derivada: $f^{(4)}(x) = 0$ e assim por diante...

Aqui, observamos que as derivadas de ordem superior de $f(x) = x^3$ resultam em constantes ou zero, indicando que a função original é uma função polinomial de terceiro grau. Esse padrão pode variar dependendo da função original.

As derivadas de ordem superior são úteis em muitos contextos, como na análise de concavidade, pontos de inflexão e na modelagem de fenômenos físicos mais complexos. Elas ajudam a compreender melhor o comportamento das funções em diferentes níveis de detalhe e são uma ferramenta essencial em cálculo e análise matemática.

Por exemplo, quando falamos sobre taxa de desmatamento ao longo do tempo, a primeira e segunda derivada desempenham papéis importantes na análise e compreensão das mudanças na taxa de desmatamento.

A primeira derivada de uma função (taxa de mudança instantânea) que descreve a taxa de desmatamento em relação ao tempo indica a taxa instantânea de mudança na quantidade de área desmatada. Em termos simples, representa a velocidade com que o desmatamento está ocorrendo em um determinado momento no tempo. Se essa derivada for positiva, significa que a taxa de desmatamento está aumentando ao longo do tempo, indicando uma situação preocupante de aceleração do desmatamento. Por outro lado, se a derivada for negativa, indica que a taxa de desmatamento está diminuindo, o que poderia ser um sinal positivo de medidas eficazes de conservação ou políticas de reflorestamento.

A segunda derivada da função da taxa de desmatamento (taxa de variação da taxa de desmatamento) em relação ao tempo representa a taxa de variação da taxa de desmatamento, ou seja, como a taxa de desmatamento está mudando ao longo do tempo. Uma segunda derivada positiva indica que a taxa de desmatamento está aumentando ainda mais rapidamente ao longo do tempo, sugerindo uma aceleração no processo de desmatamento. Por outro lado, uma segunda derivada negativa indica que a taxa de desmatamento está diminuindo, o que pode indicar uma desaceleração no ritmo de desmatamento. Essa informação é fundamental para avaliar se as políticas de controle do desmatamento estão sendo eficazes em mitigar o a supressão florestal.

 Pausa para reflexão!

As expressões de derivada...

Existem duas maneiras mais adotadas para representar a função derivada de f. Uma é a notação Lagrange: f' (pronuncia-se "f linha", sendo esta a mais usada; outra é de Newton: f '(x) e mais outra, a notação de Leibniz: $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[f(x)]$.

Para saber sobre a evolução dessas anotações, leia o artigo: "A evolução da notação para derivadas" de Kleber Kilhian (2019), acessando o link: https://www.obaricentrodamente.com/2019/02/a-evolucao-da-notacao-para-derivadas.html

Referências

BATSCHELET, E. Introdução à matemática para biocientistas. Trad. Vera Maria Abud Pacífico da Silva e Junia Maria Penteado de Araújo Quitete. São Paulo: Universidade de São Paulo. 1978.

GUIDORIZZI, H. L. Um curso de cálculo. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, c2009. v.1. 635 p.

HOFFMANN, L.D. Cálculo: um curso moderno e suas aplicações. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1999.

LARSON, R.E.; HOSTETLER, R.P.; EDWARDS, B. H. Cálculo com aplicações. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1998.

CÁLCULO INTEGRAL

O que é Cálculo Integral?

O cálculo integral lida com conceitos relacionados à acumulação e mudança contínua, sendo utilizado para calcular áreas sob curvas, volumes de sólidos de revolução, comprimento de curvas, entre outras aplicações.
Existem duas principais abordagens no cálculo integral: **integral definida** e **integral indefinida**.
Sabemos calcular áreas de regiões simétricas, mas como calcular áreas de regiões **curvas não simétricas**?
É possível calcular áreas de regiões curvas não simétricas a partir da ideia **de integrais**. Portanto, o cálculo é uma ótima ferramenta para lidar com coisas infinitas ou infinitesimais!

A ideia básica do cálculo Integral é de **calcular a área sob uma curva**.

Cálculo Integral

O cálculo integral trata-se da operação inversa à realizada pela derivação, ou seja, busca identificar a função de origem (primitiva) a partir da sua derivada.

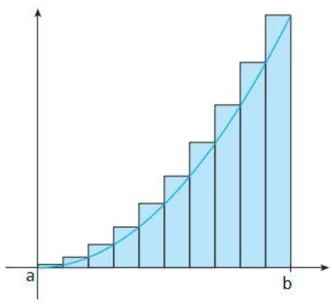
Existem duas principais abordagens no cálculo integral: integral definida e integral indefinida.

Integral definida

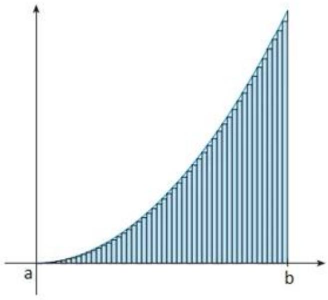
Representa a área sob uma curva em um intervalo específico. A **integral definida** é representada por:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Suponhamos uma função f(x) cujo gráfico seja curvo e que seja definida em um intervalo de $\boldsymbol{a}$ até $\boldsymbol{b}$. Vamos então desenhar alguns retângulos dentro desse intervalo da função $f(x)$, conforme a imagem abaixo:



Considerando que temos $\boldsymbol{n}$ **retângulos** na imagem, ao tendermos o valor de n para infinito, saberemos com exatidão o valor da área dessa função. Repare como ficou a imagem anterior:



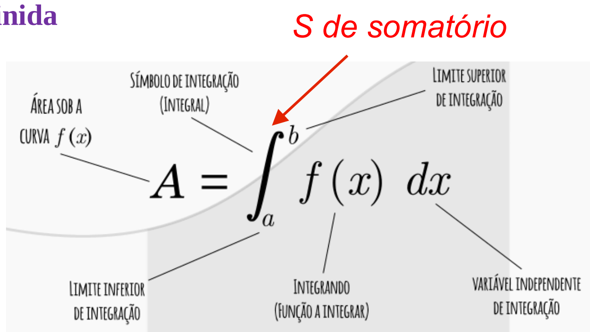
Essa é uma definição informal de uma integral definida!

É importante notar que, a integral definida **é um número**.

A integral definida pode ser interpretada como a **área resultante de uma região**.

 Pausa para reflexão!

Notação para Integral Definida



Fonte: Adaptado de https://www.obaricentrodamente.com/

Como se lê?

A área A é a integral da função $f(x)$, no intervalo $[a, b]$, em que:
$\int$ é o símbolo de integral; $f(x)$ é o integrando;
dx é a diferencial ou variável independente de integração; e,
a e b são os limites de integração inferior e superior, respectivamente.

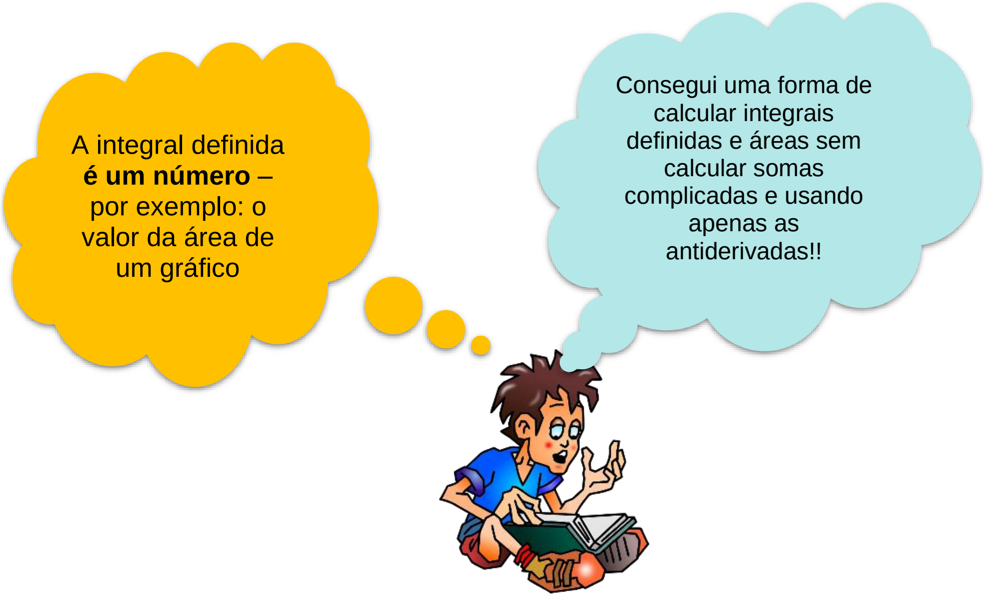
O que diz?

A notação indica calcular a integral de uma função e aplicar os limites de integração, encontrando área entre a curva e o eixo dos x.
A área representa a soma das áreas dos retângulos (n) de larguras infinitesimais dx, no intervalo fechado $[a, b]$.

Fonte: https://www.obaricentrodamente.com/

Para se calcular uma integral definida, podemos utilizar a sua definição, porém esse método requer certo conhecimento com somatório e limites, já que a definição abrange ambos.

Podemos também utilizar as tabelas de integrais disponíveis nos livros didáticos e mesmo na internet.



Propriedades das Integrais

As integrais têm várias propriedades que nos permitem simplificar cálculos e manipular expressões de forma conveniente. Aqui estão algumas das propriedades mais importantes das integrais:

Linearidade

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções integráveis e c uma constante. Então, as seguintes propriedades valem:

$$\int [c.f(x) + g(x)]dx = c\int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Esta propriedade nos permite dividir uma integral de uma soma ou diferença em integrais separadas, e também nos permite levar constantes para fora da integral.

Inversão do Intervalo

Se $f(x)$ é uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Essa propriedade nos permite inverter os limites de integração, trocando o sinal da integral. Isso é útil em várias situações, como na simplificação de cálculos ou na aplicação de certas transformações matemáticas.

Limites Iguais

Seja f(x) uma função contínua definida no intervalo [a,a]. Então, a integral definida de f(x) de a até a é dada por:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

De acordo com a definição de integral definida, isso representa a soma dos valores de f(x) multiplicados pela variação infinitesimal dx à medida que x percorre o intervalo de a até a. No entanto, como o intervalo é apenas um ponto (ou seja, a), a variação dx é essencialmente zero. Portanto, a soma dos valores de f(x) multiplicados por zero é zero.

Aditividade do Intervalo

Se $a < c < b$, então:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_a^c f(x)dx$$

Essa propriedade permite dividir uma integral em intervalos menores.

Soma e subtração de integrais

Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções integráveis em um intervalo $[a, b]$, então:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Essa propriedade nos permite dividir a integral de uma soma ou diferença em duas integrais separadas, o que facilita o cálculo.

Termo constante

Se $f(x)$ é uma função integrável em um intervalo $[a, b]$, e c é uma constante, então:

$$\int_a^b cdx = c(b - a)$$

$$\int_a^b c.f(x)dx = c.\int_a^b f(x)dx$$

Comparação para Integrais

Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções contínuas em $[a, b]$ com $f(x) \geq g(x)$ para todo x em $[a, b]$, então:

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

Essa propriedade é útil para comparação de integrais. Ela nos diz que se uma função é sempre maior ou igual a outra em um intervalo, então a integral da função maior será maior ou igual à integral da função menor nesse intervalo. Essa relação é intuitiva, pois estamos basicamente somando áreas sob a curva e, se uma curva está sempre acima da outra, a área sob ela deve ser maior ou igual.

Integral do Zero

A integral da função constante $f(x) = 0$ em qualquer intervalo é zero:

$$\int_a^b 0dx = 0$$

Produto de Funções

Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções integráveis em um intervalo $[a, b]$, então:

$$\int_a^b f(x).g(x)dx = \left(\int_a^b f(x)dx\right).\left(\int_a^b g(x)dx\right)$$

Integral Indefinida

De forma geral, a integral indefinida de uma função f é conhecida como sendo a **primitiva de $\boldsymbol{f}$**.

Em outras palavras, a integral indefinida representa toda uma família de funções que são diferenciadas por uma constante C.

É importante notar que a integral indefinida é uma família de funções. Ou seja, um conjunto de todas as antiderivadas da função $f'(x)$ é chamada integral indefinida (ou antidiferencial) de f com relação a x e é representada por:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

A constante $\boldsymbol{C}$

Ao realizar uma integração, você está essencialmente procurando por uma antiderivada de uma função. Quando você integra uma função, geralmente há uma constante que aparece no resultado. Essa constante é chamada de constante de integração, geralmente denotada por C.

A razão pela qual essa constante aparece é que, ao derivar uma constante, ela se torna zero. Portanto, ao integrar, você está "desfazendo" a derivação e, sem mais informações, não pode determinar o valor exato da constante original que foi derivada.

Por exemplo, considere a integral definida de uma função $f(x)$ entre os limites a e b:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Ao realizar esta integração, você obterá uma expressão que pode incluir a constante C:

$$F(x) + C$$

Onde $F(x)$ é a antiderivada de $f(x)$. No entanto, quando você está trabalhando com uma integral definida, a constante C pode ser absorvida na constante de integração. Então, a resposta final seria:

$$F(b) - F(a)$$

Essa constante de integração é essencial porque, sem ela, a antiderivada obtida não seria única. É por isso que a constante C é incluída sempre que você realiza uma integração indefinida, como uma maneira de indicar que há uma família de funções que têm a mesma derivada.

Método 1: Integração por Substituição

A integração por substituição, também conhecida como "mudança de variável", é um método para simplificar a expressão integranda através de uma substituição adequada. A ideia básica é substituir uma expressão complicada por uma nova variável que torne a integração mais simples.

Exemplo:

Vamos considerar a integral:

$$\int x \cdot e^{x^2} dx$$

Para simplificar esta integral, podemos fazer a substituição:

$$u = x^2$$

Então, diferenciando ambos os lados em relação a x, obtemos:

$$du = 2xdx$$

Rearranjando, temos:

$$\frac{1}{2} du = xdx$$

Agora, podemos reescrever a integral em termos de u:

$$\int e^u \cdot \frac{1}{2} du$$

Que é uma integral mais simples de resolver. Após integrar, podemos substituir de volta u por x^2 para obter a resposta final.

Método 2: Integração por Partes

Se f e g são funções diferenciáveis, a regra de diferenciação do produto diz que:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{1}$$

Integrando ambos os lados em (1), obtemos:

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\, dx = \int [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]dx \tag{2}$$

Ou,

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\, dx = \int [f'(x)g(x)]dx + \int [f(x)g'(x)]dx \tag{3}$$

Rearranjando os termos em (3), temos:

$$\int f(x)g'(x)\,dx = \int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]dx - \int [f'(x)g(x)]dx$$

Assim, a fórmula de integração por parte será:

$$f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx \tag{4}$$

Podemos usar esta fórmula para simplificar uma resolução de integral. Usando a regra da substituição, chamamos de:

$u \ = \ f(x)$ e $v \ = \ g(x)$

$u = f(x)$, então $\ du \ = f\,'(x)dx$

$v \ = \ g(x)$, então $dv \ = g'\,(x)dx$

Usando a regra da substituição, a fórmula da integração por parte (4) se torna:

$$\int udv = uv - \int vdu$$


Pausa para reflexão!

Como escolher o $u(x)$?

Existe uma regra bem simples e fácil de "decorar"

A sequência de escolha será seguir a ordem das letras na palavra **LIATE**.

Regra do LIATE

Partindo dessa regra, devemos escolher e dv conforme a ordem que as funções são representadas dentro do anagrama "L-I-A-T-E":

L = funções Logarítmicas
I = funções Trigonométricas Inversas
A = funções Algébricas
T = funções Trigonométricas
E = funções Exponenciais

Exemplo:

Temos $\int \ x.sen(x)\ dx$ uma integral indefinida (que veremos a frente)

Na expressão, temos uma função polinomial (**A**lgébrica) e uma **T**rigonométrica! Então, escolheremos a polinomial primeiro: $u(x) \ = \ x$. E, sobrou o quê?

$$v'(x) \ = \ sen(x)$$

Lembre-se que $u(x) \ = \ x \ \rightarrow \ u'(x) \ = \ 1$ e $v'(x) \ = \ sen(x)$, $v(x) \ = \ -cos(x)$.

Então fica:

$$\int x.sen(x)\,dx = \int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx.$$

Substituindo:

$$\int x.sen(x)\,dx = x.(-cos(x)) - \int (-cos(x)).(1)dx$$

$$= -x.cos(x) + \int cos(x)dx$$

$$= -x.cos(x) + sen(x) + C$$

Método 3: Integração por Funções Racionais

Integrais de funções racionais são aquelas em que o integrando é uma razão polinomial, ou seja, uma fração em que o numerador e o denominador são polinômios. O método de decomposição em frações parciais é uma técnica comum usada para resolver integrais desse tipo.

Exemplo:

Considere a integral:

$$\int \frac{3x+2}{x^2-4x+3}dx$$

Para resolver essa integral, primeiro fatoramos o denominador da fração:

$$x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1)$$

Agora, expressamos a fração original como uma soma de frações parciais:

$$\frac{3x+2}{x^2-4x+3} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-1}$$

onde A e B são constantes que precisamos determinar. Para encontrar A e B, multiplicamos

$$3x + 2 = A(x-1) + B(x-3)$$

Expandindo e agrupando os termos, obtemos:

$$3x + 2 = (A+B)x - (A \cdot 1 + B \cdot 3)$$

Comparando os coeficientes dos termos semelhantes, obtemos um sistema de equações

$$A + B = 3$$

$$-A - 3B = 2$$

Resolvendo este sistema, encontramos os valores de A e B. Depois de resolver, encontraremos $A = 11/2$ e $B = -5/2$.

Agora, podemos reescrever a integral original em termos de frações parciais:

$$\int \frac{{}^{11}/_{5}}{x-3}dx + \int \frac{{}^{-5}/_{2}}{x-1}dx$$

Essas integrais podem ser facilmente resolvidas usando a regra da potência. Depois de integrar cada termo, obtemos a solução completa da integral original.

Este é o processo básico para resolver integrais de funções racionais usando decomposição em frações parciais. Essa técnica é muito útil para lidar com integrais que não podem ser resolvidas diretamente por outras técnicas de integração.

Método 4: Integração Trigonométrica

Integrais envolvendo funções trigonométricas são comuns e podem ser resolvidas usando identidades trigonométricas ou substituições trigonométricas.

Exemplo:

Vamos resolver a integral:

$$\int sin(x) \cdot cos(x)dx$$

Podemos usar a identidade trigonométrica $sin(2x) = 2sin(x)cos(x)$. Então, podemos reescrever a integral como:

$$\frac{1}{2}\int sin(2x)dx$$

Que é uma integral mais simples de resolver. Após integrar, podemos voltar à função original substituindo $2x$ por x.

Fórmulas de Integração

As mais comuns:

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$$

$$\int kdx = kx + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq -1)$$

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln\ |a|} + C$$

Trigonométricas:

$$\int sen\ x\ dx = -\cos x + C$$

$$\int sec^2\ x\ dx = -\tan x + C$$

$$\int \sec x \tan x\ \ dx = \sec x + C$$

$$\int \cos x\ \ dx = sen\ x + C$$

$$\int cossec^2\ x\ dx = -cotan\ x + C$$

$$\int cossec\ x\ cotan\ c\ dx = -cossec\ x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = sen^{-1}\ x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = tan^{-1}\ x + C$$


Pausa para reflexão!

Onde aplicamos o conceito de integral na Ciência Ambiental?

A aplicação de cálculo integral nas Ciências Ambientais vai permitir obter o cálculo de áreas limitadas por curvas, ou seja, interpretando resultado de algum comportamento biológico, também pode ser aplicado em estudos sobre pressão, hidrostática, crescimento populacional, economia, transferência de calor, comprimento de arcos, volume de sólidos, momento de inércia, energia no campo elétrico, centro de massa de um corpo, trabalho de uma força, probabilidades e muitas outras aplicações.

Leia o artigo “O uso da integral definida no cálculo da área alagada da barragem do rio bonito”, em que os autores utilizam do cálculo integral para calcular a área alagada de uma barragem, acessando o link:
http://revistas.cefet-rj.br/index.php/producaoedesenvolvimento

Aplicações de Integrais em Ciências Ambientais

As integrais têm várias aplicações em Ciências Ambientais, especialmente em áreas como modelagem de sistemas ambientais, hidrologia, biogeoquímica, ecologia, entre outras. A seguir estão alguns exemplos de como as integrais são aplicadas nessas áreas:

- Modelagem de fluxos de poluentes: Integrais são frequentemente usadas na modelagem de fluxos de poluentes em sistemas ambientais, como rios, lagos e aquíferos. Por exemplo, a integral de uma função de concentração de poluente ao longo do tempo e/ou espaço pode fornecer informações sobre a carga total de poluente transportada em um sistema.

- Cálculo de áreas de bacias hidrográficas: Na hidrologia, as integrais são utilizadas para calcular a área de bacias hidrográficas, o que é essencial para entender a dinâmica de escoamento de água em uma região. Isso é feito integrando a função que descreve a elevação do terreno sobre a área da bacia.

- Determinação de taxas de mudança em ecossistemas: As integrais são aplicadas na ecologia para determinar taxas de mudança em ecossistemas, como a taxa de crescimento populacional de uma espécie ou a taxa de decomposição da matéria orgânica. Isso envolve a integração de funções que descrevem esses processos ao longo do tempo.

- Análise de fluxos de energia e nutrientes: Integrais são usadas para analisar fluxos de energia e nutrientes em ecossistemas. Por exemplo, a integral da taxa de entrada ou saída de nutrientes em um sistema pode fornecer uma estimativa da quantidade total de nutrientes que entram ou saem do sistema ao longo de um determinado período de tempo.

- Cálculo de emissões de gases de efeito estufa: Na avaliação do impacto das atividades humanas sobre o clima, as integrais são utilizadas para calcular as emissões totais de gases de efeito estufa ao longo do tempo, o que é importante para entender e mitigar as mudanças climáticas.

Estes são apenas alguns exemplos de como as integrais são aplicadas em ciências ambientais. Em geral, as integrais desempenham um papel fundamental na modelagem, análise e compreensão dos processos ambientais complexos que ocorrem em nosso planeta.

Referências

BATSCHELET, E. Introdução à matemática para biocientistas. Trad. Vera Maria Abud Pacífico da Silva e Junia Maria Penteado de Araújo Quitete. São Paulo: Universidade de São Paulo. 1978.

GUIDORIZZI, H. L. Um curso de cálculo. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, c2009. v.1. 635 p.

HOFFMANN, L.D. Cálculo: um curso moderno e suas aplicações. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1999.

LARSON, R.E.; HOSTETLER, R.P.; EDWARDS, B. H. Cálculo com aplicações. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1998.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

O que são Equações Diferenciais?

As equações diferenciais são ferramentas matemáticas fundamentais para modelar diversos fenômenos que ocorrem na natureza. Elas descrevem a relação entre uma função desconhecida e suas derivadas, capturando a dinâmica de sistemas que mudam ao longo do tempo ou do espaço.

Em ciências ambientais, essas equações são essenciais para entender processos como a dispersão de poluentes, o crescimento populacional, a troca de energia entre a atmosfera e os oceanos, entre outros.

A importância das equações diferenciais nas ciências ambientais reside na sua capacidade de traduzir processos físicos, químicos e biológicos em modelos matemáticos, que podem ser analisados e resolvidos para prever o comportamento futuro de sistemas complexos. Existem dois tipos principais de equações diferenciais que serão abordados neste capítulo: as **equações diferenciais ordinárias (EDOs)** e as **equações diferenciais parciais (EDPs)**. Enquanto as EDOs envolvem derivadas em relação a uma única variável independente, geralmente o tempo, as EDPs envolvem derivadas em relação a mais de uma variável, como o tempo e o espaço.

Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs)

As EDOs são equações que envolvem uma função desconhecida de uma variável independente (em muitos casos, essa variável é o tempo, mas pode ser qualquer outra variável, como a distância), ou seja, inclui uma função *y(x)* e suas derivadas em relação à variável independente x. Por exemplo, uma EDO pode ter a forma:

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2},$$

etc.

Uma ODE pode ser expressa, genericamente, como:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

Onde y(t) é a função desconhecida de t, e $f(t, y)$ é uma função dada que relaciona y e suas derivadas.

A ordem de uma EDO é determinada pela derivada de maior ordem presenta na equação. Por exemplo, a equação y^"+y=0 é uma EDO de segunda ordem, pois a derivada de maior ordem é y".

Tipos de EDOs:

- **EDOs de Primeira Ordem:** Envolvem a primeira derivada da função desconhecida, y'.

A forma geral de uma EDO de primeira ordem é:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

Onde Fé uma função que pode incluir a função y, a variável independente x, e a derivada

$$\frac{dy}{dx}.$$

- **EDOs de Segunda Ordem:** Envolvem até a segunda derivada, y''.

Para uma EDO de segunda ordem, a forma geral é:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

Onde F agora pode incluir até a segunda derivada

$$\frac{d^2y}{dx^2}.$$

- **Equações Lineares:** Uma EDO é chamada linear se a função desconhecida e suas derivadas aparecem de forma linear.

- **Equações Não Lineares:** A função desconhecida ou suas derivadas aparecem de forma não linear (por exemplo, y^2 ou $y' \cdot y$).

E ainda, uma EDO é homogênea se todos os termos envolvidos na função desconhecida e suas derivadas somarem zero. Caso contrário, é não homogênea. Por exemplo, $y'' + y = 0$ é homogênea, enquanto $y'' + y = x$ é não homogênea.

De um modo geral, ao resolver uma Equação Diferencial Ordinária (EDO), você está buscando a função (ou conjunto de funções) que descreve a evolução de um sistema ao longo do tempo ou ao longo de outra variável independente, de acordo com a taxa de variação especificada pela EDO. Em outras palavras, uma EDO relaciona a taxa de variação de uma quantidade com a própria quantidade. A principal saída ao resolver uma EDO é a função solução, que descreve como a variável dependente (por exemplo, a população em um modelo ecológico) muda em relação à variável independente (por exemplo, o tempo). Essa função fornece uma descrição completa do comportamento do sistema modelado.

Quando resolvemos uma EDO, estamos essencialmente invertendo o processo de diferenciação para encontrar uma função que satisfaz a EDO e envolve encontrar uma função a partir de sua taxa de variação, que é o oposto de encontrar a taxa de variação de uma função conhecida.

Em muitos casos, a solução de problemas que envolvem taxas de variação (ou derivadas) pode ser complicada ou impossível de ser encontrada diretamente através da integração padrão. Quando isso acontece, você pode recorrer às EDOs e suas técnicas de solução para lidar com essas situações. Ainda assim, resolver uma EDO frequentemente envolve processos de integração, seja diretamente ou como parte de métodos mais complexos. A integração é uma ferramenta fundamental na resolução de EDOs, permitindo que encontremos funções que descrevem a evolução de sistemas dinâmicos modelados pela EDO.

Exemplos de EDOS

Equação linear de primeira ordem

$$y' + 2y = e^x$$

Primeiro, encontramos o fator integrante $\mu(x) = e^{\int 2dx} = e^{2x}$. Multiplicando ambos os lados da EDO por e^{2x}:

$$e^{2x}y' + 2e^{2x}y = e^{3x}$$

A equação pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{dx}(e^{2x}y) = e^{3e}$$

Integrando ambos os lados:

$$e^{2x}y = \frac{e^{3x}}{3} + C$$

Assim, a solução é:

$$y = \frac{e^{x}}{3} + Ce^{-2x}$$

Equação de segunda ordem com coeficientes constantes:

$$y'' + y = 0$$

A equação característica é $r^2 + 1 = 0$, cujas raízes são $r = \pm i$. A solução geral é:

$$y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$$

Aplicação de EDOs em Ecologia de Populações

Em ecologia, um dos modelos mais conhecidos que utiliza EDOs é o modelo logístico de crescimento populacional, que descreve como uma população cresce em um ambiente com recursos limitados.

1. Modelo exponencial de crescimento populacional

Inicialmente, podemos modelar o crescimento de uma população com recursos ilimitados usando uma EDO de primeira ordem simples:

$$\frac{dP}{dt} = rP$$

onde:

- $P(t)$ é o tamanho da população no tempo t
- r é a taxa de crescimento per capita da população

Para resolver essa EDO, podemos separar as variáveis:

$$\frac{dP}{P} = r\,dt$$

Integrando ambos os lados:

$$lnP = rt + C$$

Onde C é a constante de integração. Exponenciando ambos os lados:

$$P(t) = P_0 e^{rt}$$

Aqui, $P_0 = e^C$ é o tamanho inicial da população no tempo $t = 0$. Este modelo, conhecido como crescimento exponencial, assume que a população cresce sem restrições.

2. Modelo logístico de crescimento populacional

Na realidade, os recursos são limitados, e o crescimento populacional tende a diminuir à medida que a população se aproxima da capacidade de suporte K do ambiente. Esse comportamento é descrito pelo modelo logístico:

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

Onde:

K é a capacidade de suporte do ambiente, ou seja, o tamanho máximo da população que o ambiente pode sustentar.

<u>Interpretação</u>

- Quando P é pequeno em relação a K, a população cresce quase exponencialmente.
- Quando P se aproxima de K, o termo $\left(1 - \frac{P}{K}\right)$ diminui, desacelerando o crescimento.
- Quando $P = K$, o crescimento para $\left(\frac{dP}{dt} = 0\right)$.

A EDO logística é não linear, mas podemos resolvê-la separando as variáveis:

$$\frac{dP}{P(1 - \frac{P}{K})} = r\,dt$$

Integramos ambos os lados. Isso resulta em:

$$\int \left(\frac{1}{P} + \frac{1/K}{1 - P/K}\right) dP = \int r\ dt$$

Essa integral pode ser resolvida para obter a solução:

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - P_o}{P_0}\right) e^{-rt}}$$

Aqui, P_0 é o tamanho inicial da população. Esta equação mostra que $P(t)$ aumenta com o tempo, aproximando-se da capacidade de suporte K conforme t aumenta.

Aplicação prática

Imagine que estamos estudando uma população de peixes em um lago. Suponha que a capacidade de suporte K seja de 1000 peixes e a taxa de crescimento r seja de 0,3 por ano.

Se inicialmente, a população P_0 for de 100 peixes, o crescimento da população ao longo do tempo pode ser modelado pela equação logística:

$$P(t) = \frac{1000}{1 + 9e^{-0,3t}}$$

- No início, $(t = 0), P(0) = 100$.
- Após 10 anos, a população será:

$$P(10) = \frac{1000}{1 + 9e^{-3}} \approx 452\, peixes$$

- Após 20 anos, a população será:

$$P(20) = \frac{1000}{1 + 9e^{-6}} \approx 930\, peixes$$

Com o tempo, a população se estabiliza em torno de 1000 peixes, conforme previsto pela capacidade de suporte K.

Quando você resolve a Equação Diferencial Ordinária associada ao modelo logístico, você encontra a função que descreve o crescimento populacional ao longo do tempo, levando em consideração um limite superior que a população não pode ultrapassar. O resultado é uma função sigmoidal que mostra como a população cresce rapidamente no início, desacelera à medida que se aproxima da capacidade de suporte do ambiente e, finalmente, se estabiliza.

Pelo observado, resolver uma EDO significa encontrar a função ou funções que satisfazem a equação diferencial dada. Dependendo da equação, a solução pode ser explicita, implícita ou paramétrica. Assim, há várias técnicas para resolver EDOS.

Métodos de Solução – Primeira Ordem

Existem diversos métodos para resolver EDOs, dependendo da forma da equação. Aqui estão alguns dos métodos mais comuns:

a) Separação de Variáveis

Este método é usado quando uma ODE de primeira ordem pode ser escrita de forma que todas as ocorrências de y e suas derivadas estejam de um lado da equação, e todas as ocorrências de t estejam do outro lado. A equação é então integrada em ambos os lados para encontrar a solução.

Exemplo: Considere a equação diferencial que descreve o decaimento radioativo:

$$\frac{dN}{dt} = -kN$$

Onde $N(t)$ é a quantidade de material radioativo no tempo t e k é uma constante positiva. Podemos separar as variáveis e integrar:

$$\frac{1}{N} dN = -kdt$$

Integrando ambos os lados:

$$\int \frac{1}{N} dN = \int -kdt$$

$$\ln|N| = -kt + C$$

onde C é a constante de integração.

Para resolver N, exponenciamos ambos os lados da equação:

$$|\mathrm{N}| = e^{-kt+C}$$

que pode ser reescrito como:

$$|\mathrm{N}| = e^{C}e^{-kt}$$

onde e^{C} é uma constante positiva, que podemos representar como N_0 (quantidade inicial de material radioativo). Então,

$$|\mathrm{N}| = N_0 e^{-kt}$$

é a solução geral da equação diferencial para o decaimento radioativo, que descreve como a quantidade de material radioativo $\mathrm{N(t)}$ diminui exponencialmente com o tempo t, com uma taxa determinada pela constante k.

b) Fator Integrante

Este método é aplicável a equações diferenciais lineares de primeira ordem da forma:

$$\frac{dy}{dt} + P(t)y = Q(t)$$

O fator integrante $I(t)$ é definido como:

$$I(t) = e^{\int P(t)dt}$$

Multiplicando a equação original por $I(t)$, a equação se torna exata e pode ser integrada diretamente.

O que é uma Equação Exata?
Imagine que você está caminhando em um terreno com elevações e descidas. Você começa em um ponto e quer saber a altitude em qualquer outro ponto do terreno. A altitude (altura) depende da sua posição no terreno (suas coordenadas x e y).

Agora, se você souber a inclinação do terreno em cada direção (ou seja, quão íngreme é para cima ou para baixo em cada ponto), você pode descobrir a altitude em qualquer lugar, mesmo que não conheça a altitude inicial. Esta inclinação pode ser vista como as derivadas da função de altitude.

Uma **equação exata** é como uma descrição matemática dessa inclinação que, se você segui-la corretamente, pode ser revertida para encontrar a altitude original. Em outras palavras, se você tiver as informações corretas sobre como a altura muda em diferentes direções (as derivadas), você pode "subir a montanha" de volta para descobrir a altura em qualquer ponto.

Outra analogia de equação exata é uma receita para fazer um bolo. A receita te diz os passos exatos para misturar os ingredientes e assar o bolo. Se você seguir a receita, você pode fazer o bolo. Agora, uma equação exata é como uma receita matemática que te permite voltar atrás: se você tiver o bolo pronto e souber exatamente como cada ingrediente foi misturado (as derivadas), você pode reconstruir a receita original.

Exemplo: Considere a equação:

$$\frac{dy}{dt} + 2ty = t$$

Aqui, $P(t) = 2ty$ e $Q(t) = t$. O fator integrante é:

$$I(t) = e^{\int 2t\,dt} = e^{t^2}$$

Multiplicando a equação original por e^{t^2}, obtemos:

$$e^{t^2}\frac{dy}{dt} + 2te^{t^2}y = te^{t^2}$$

Agora, observe que o lado esquerdo da equação pode ser reescrito como a derivada do produto y e e^{t^2}:

$$\frac{d}{dt}\left(ye^{t^2}\right) = te^{t^2}$$

Como isso funciona? Vamos expandir a derivada do produto:

$$\frac{d}{dt}\left(ye^{t^2}\right) = \frac{dy}{dt}e^{t^2} + y\frac{d}{dt}e^{t^2}$$

A derivada de e^{t^2}em relação a t é:

$$\frac{d}{dt}(e^{t^2}) = 2te^{t^2}$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}(e^{t^2}) = \frac{dy}{dt}e^{t^2} + 2tye^{t^2}$$

Agora, integrando ambos os lados:

$$ye^{t^2} = \int te^{t^2}\,dt$$

A solução geral para $y(t)$ pode ser encontrada integrando o lado direito e dividindo por e^{t^2}.

Métodos de Solução – Segunda Ordem

EDOs de segunda ordem são equações que envolvem uma função desconhecida $y(x)$ e suas derivadas até a segunda ordem. A forma geral de uma ODE de segunda ordem é:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = g(x)$$

onde:

- $\frac{d^2y}{dx^2}$ é a segunda derivada de y em relação a x
- $\frac{dy}{dx}$ é a primeira derivada de y

A solução de uma ODE de segunda ordem depende se a equação é homogênea ou não-homogênea.

Equação Homogênea

Uma ODE de segunda ordem é dita homogênea se $g(x) = 0$, o que resulta na forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0$$

Passo a Passo para Resolver:

1) **Equação Característica:**

Se p(x) e q(x) são constantes, a equação pode ser resolvida usando uma suposição do tipo $y = e^{rx}$, onde r é uma constante a ser determinada. Substituindo essa forma na ODE, obtemos uma equação quadrática chamada **equação característica**:

$$r^2 + pr + q = 0$$

2) **Raízes da Equação Característica:**

Resolva a equação característica para encontrar as raízes r_1 e r_2. Existem três casos:

- **Duas raízes reais distintas** ($r_1 \neq r_2$): A solução geral é:

$$y(x) = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$$

- **Duas raízes reais iguais** ($r_1 = r_2 = r$): A solução geral é:

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{rx}$$

- **Raízes complexas conjugadas** ($r = \alpha \pm \beta i$): A solução geral é:

$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$$

Equação Não-Homogênea

Se $g(x) \neq 0$, a equação é não-homogênea e tem a forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = g(x)$$

Passo a Passo para Resolver:

1) Solução Geral:

- A solução geral $y(x)$ para a equação não-homogênea é dada pela soma da solução geral $y_h(x)$ da equação homogênea associada (onde $g(x) = 0$) e uma solução particular $y_p(x)$ da equação completa:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

2) Encontrando a Solução Particular $y_p(x)$:

- Existem vários métodos para encontrar a solução particular, dependendo da forma de $g(x)$:

  - Método dos Coeficientes Indeterminados: Usado quando $g(x)$ é uma função simples, como um polinômio, seno, cosseno ou exponencial. Suponha uma forma para $y_p(x)$ semelhante a $g(x)$ e determine os coeficientes substituindo na equação original.

  - Método da Variação dos Parâmetros: Usado quando $g(x)$ é mais complicado. Assume-se que a solução particular tem a forma $y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$ são soluções da equação homogênea associada. As funções $u_1(x)$ e $u_2(x)$ são determinadas resolvendo um sistema de equações.

Exemplo de Solução Completa:

Considere a equação

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{2x}$$

A equação característica é:

$$r^2 + 3r + 2 = 0$$

Resolva para r:

$$(r-2)(r-1) = 0$$

As raízes são $r_1 = 2$ e $r_2 = 1$.

A solução geral da equação homogênea é:

- $y_h(x) = C_1e^{2x} + C_2e^x$

Para a solução particular $y_p(x)$, suponha que $y_p(x) = Axe^{2x}$ (porque e^{2x} é parte da solução homogênea).

Substituímos $y_p(x)$ na equação original para encontrar A.

Calculando as derivadas de $y_p(x)$:

$$\frac{dy_p}{dx} = A(e^{2x} + 2xe^{2x})$$

$$\frac{d^2y_p}{dx^2} = A(2e^{2x} + 2e^{2x} + 4xe^{2x}) = A(4e^{2x} + 4xe^{2x})$$

O que são C_1e C_2?

Os coeficientes C_1 e C_2 são **constantes de integração** que aparecem na solução geral de uma equação diferencial de segunda ordem. Eles representam as soluções particulares da equação diferencial homogênea associada. Para determinar os valores específicos de C_1 e C_2, você precisa de **condições iniciais** ou **condições de contorno** adicionais.

Suponha que você tenha uma equação diferencial de segunda ordem, e as condições iniciais são dadas como:

- $y(x_0) = y_0$ (o valor de y em $x = x_0$)
- $\frac{dy}{dx}(x_0) = y_0{}'$ (o valor da derivada de y em $x = x_0$).

Com essas condições, você pode determinar os valores de C_1 e C_2 substituindo $y(x)$ e $\frac{dy}{dx}$ nas condições iniciais e resolvendo o sistema de equações resultante.

Substituindo essas expressões na equação diferencial:

$$A(4e^{2x} + 4xe^{2x}) - 3A(e^{2x} + 2xe^{2x}) + 2Axe^{2x} = e^{2x}$$

$$Ae^{2x} = e^{2x}$$

Portanto, $A = 1$. Logo,

$$y_p(x) = e^{2x}$$

Assim, a Solução Geral Completa é:

$$y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{1x} + xe^{2x}$$

Agora, suponha que as condições iniciais sejam:

- $y(0) = 4,$
- $\frac{dy}{dx}(0) = 5$

Substituímos $x = 0$ e $y(0) = 4$ na solução geral calculada anteriormente e obtemos:

$$C_1 + C_2 = 4\ (Eq. 1)$$

Calculando a derivada de $y(x)$ temos

$$\frac{dy}{dx} = 2C_1e^{2x} + C_2e^{x} + e^{2x} + 2xe^{2x}$$

Agora, substituímos $x = 0$ e $\frac{dy}{dx}(0) = 5$, resulta-se em:

$$2C_1 + C_2 = 4\ (Eq. 2)$$

Agora, resolvemos o sistema de equações simultâneas:

- Da Equação 1: $C_1 + C_2 = 4$,
- Da Equação2: $2C_1 + C_2 = 4$.

Subtraindo a Equação 1 da Equação 2:

$$(C_1 + C_2) - (2C_1 + C_2) = 4 - 4$$

$$C_2 = 0$$

Substituindo $C_2 = 1$ na Equação 1:

$$0 + C_2 = 4$$

$$C_1 = 4$$

Portanto, a solução particular da ODE que satisfaz as condições iniciais é:

$$y(x) = 4e^x + xe^{2x}$$

Equações Diferenciais Parciais (EDPs)

EDPs são uma classe de equações diferenciais que envolvem funções de várias variáveis independentes e suas derivadas parciais. Elas são fundamentais em muitas áreas da ciência e da engenharia, incluindo a física, a biologia, a economia, e especialmente nas ciências ambientais, onde são usadas para modelar fenômenos como a difusão de poluentes, a propagação de ondas e a dinâmica dos fluidos.

Uma equação diferencial parcial é uma equação que envolve uma função desconhecida $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de várias variáveis independentes $x_1, x_2, \dots, x_n$ e suas derivadas parciais. A forma geral de uma EDP de ordem m é:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial {x_1}^m}, \frac{\partial^m u}{\partial {x_2}^m} \dots)$$

Exemplos Comuns de EDPs

- **Equação da onda:** Modela a propagação de ondas, como ondas sonoras, ondas na superfície da água, ou ondas sísmicas.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2} = c^2 \nabla^2 u$$

- **Equação do calor:** Modela a distribuição de calor (ou difusão de uma substância) ao longo do tempo.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \nabla^2 u$$

- **Equação de Laplace:** Aparece em problemas de equilíbrio estacionário, como o potencial eletrostático e a distribuição de temperatura em estado estacionário.

$$\nabla^2 u = 0$$

- **Equação de Poisson:** É uma generalização da equação de Laplace, usada para descrever campos potenciais com fontes.

$$\nabla^2 u = f(x, y, z)$$

Classificação das EDPs
As EDPs podem ser classificadas de várias formas, como:

- **Linearidade:** Uma EDP é linear se a função F é linear em uuu e suas derivadas.
- **Ordem:** A ordem de uma PDE é a ordem da derivada mais alta presente na equação.

- **Tipo:** As EDPs de segunda ordem são classificadas como elípticas, parabólicas, ou hiperbólicas, dependendo das propriedades de seus coeficientes.

Métodos de Solução

Resolver uma EDP geralmente envolve técnicas avançadas, que podem incluir:

- **Separação de Variáveis:** Um método poderoso onde a solução é assumida como o produto de funções, cada uma dependente de uma única variável.

- **Transformadas Integrais:** Como a transformada de Fourier e a transformada de Laplace, que convertem EDP em equações diferenciais ordinárias.

- **Métodos Numéricos:** Como diferenças finitas, elementos finitos e volumes finitos, usados para resolver EDPs que não podem ser resolvidas analiticamente.

Exemplo Prático: Equação do Calor

Vamos considerar a equação do calor em uma dimensão como exemplo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Esta equação modela a distribuição de temperatura $u(x, t)$ ao longo de uma barra ao longo do tempo. Logo, $u(x, t)$ é a temperatura na posição x ao tempo t, α é uma constante que depende das propriedades do material (como a condutividade térmica), $\frac{\partial u}{\partial t}$ representa a taxa de variação da temperatura ao longo do tempo e $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ representa a curvatura da temperatura ao longo da barra, indicando como a temperatura se espalha de áreas quentes para áreas frias.

Assim, suponha que a barra tenha comprimento L, e que as condições de contorno sejam $u(0,t) = 0$ e e $u(L,t) = 0$ (a temperatura é mantida em zero nas extremidades da barra).

Para resolver essa EDP usando separação de variáveis, assume-se uma solução da forma $u(x,t) = X(x)T(t)$. Substituindo na equação do calor, obtemos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X(x)\frac{dT(t)}{dt}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = T(t)\frac{d^2X(x)}{dx^2}$$

Substituindo essas expressões na equação do calor:

$$X(x)\frac{dT(t)}{dt} = \alpha\, T(t)\frac{d^2X(x)}{dx^2}$$

Agora, dividimos ambos os lados por $X(x)T(t)$:

$$\frac{1}{\alpha T(t)}\frac{dT(t)}{dt} = \frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\lambda$$

Dessa forma, a EDP é separada em duas EDOs:

1. **Para $\boldsymbol{X(x)}$:**

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} + \lambda X(x) = 0$$

2. **Para T(t)T(t)T(t):**

$$\frac{dT(t)}{dt} + \alpha\,\lambda\, T(t) = 0$$

Essas equações podem ser resolvidas, e as soluções são combinadas para dar a solução geral da EDP original.

Referências

BATSCHELET, E. Introdução à matemática para biocientistas. Trad. Vera Maria Abud Pacífico da Silva e Junia Maria Penteado de Araújo Quitete. São Paulo: Universidade de São Paulo. 1978.

GUIDORIZZI, H. L. Um curso de cálculo. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, c2009. v.1. 635 p.

HOFFMANN, L.D. Cálculo: um curso moderno e suas aplicações. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1999.

LARSON, R.E.; HOSTETLER, R.P.; EDWARDS, B. H. Cálculo com aplicações. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1998.

DERIVADA E INTEGRAL

-APLICAÇÕES-

Qual o objetivo de estudar Cálculo nas Ciências Ambientais?

O estudo do cálculo nas Ciências Ambientais é importante porque fornece ferramentas matemáticas essenciais para a compreensão e análise de fenômenos ambientais complexos.

Com o cálculo integral é possível encontrar equações que expressem QUANTIDADE de alguma grandeza física estudada em um experimento. Ou seja, obter uma expressão que forneça o **Valor Futuro** de quantidades, a partir do conhecimento do **Valor Inicial** (ou Atual) e da sua Taxa de Variação (Derivada) ao longo do tempo ou do espaço. Portanto, o estudo do cálculo nas Ciências Ambientais oportuniza os profissionais a entenderem, modelarem e resolverem problemas complexos relacionados ao ambiente de estudo, permitindo uma abordagem mais completa e quantitativa para a análise científica que forneça subsídios para promover gestão ambiental.

Aplicações do Cálculo

O cálculo é fundamental para a criação de modelos matemáticos que representam processos ambientais, como a dispersão de poluentes, a dinâmica de populações e o fluxo de água em ecossistemas. Esses modelos ajudam os cientistas a prever o comportamento de sistemas naturais e a tomar decisões informadas sobre a gestão ambiental.

Modelagem

Podemos conceituar modelagem matemática como o processo de representar um “sistema do mundo real”, ou seja, uma situação real por meio de equações matemáticas. Frequentemente, esta ferramenta de análise é utilizada para compreender e prever o comportamento de fenômenos complexos nas diversas áreas do conhecimento, como a física, a engenharia, a economia, a biologia, bem como em questões que envolvem o estudo de potencial de poluição do ambiente, dentre outras.


Pausa para reflexão!

Consulte o artigo de Lima et al. (2016) sobre Modelos matemáticos em ecologia das populações: uma abordagem para estudantes de graduação acessando o link:
https://doi.org/10.47385/cadunifoa.v11.n32.438

O artigo abordar os **modelos de Crescimento Exponencial, Crescimento Logístico, Predador-presa e Crescimento Estruturado** em planilhas Excel, de modo que o aluno possa visualizar, de forma menos abstrata, seu funcionamento e aplicação.

Consulte também o artigo de Maia et al. (2018) sobre Modelo matemático para avaliação de impacto ambiental (AIA) acessando o link: https://gvaa.com.br/revista/index.php/RBGA/article/view/5650/6034

O artigo usou da **modelagem matemática** para auxiliar na interpretação de dados obtidos a partir das matrizes de interação (Matriz de Leopold), de modo que elaboraram um Índice de Qualidade Ambiental a partir da avaliação quantiqualitativa dos principais impactos ambientais no núcleo Cidade Nova. Marabá - PA.

O processo de modelagem matemática geralmente envolve algumas etapas, aqui descritas sucintamente:

1. Identificação do Problema:

É preciso entender o problema que você deseja resolver ou, o fenômeno que deseja estudar.

2. Formulação do Modelo:

É preciso identificar as variáveis relevantes e seus relacionamentos.

É preciso escolher o tipo de equações matemáticas que melhor representam esses relacionamentos.

3. Solução do Modelo:

É preciso resolver as equações matemáticas para obter soluções quantitativas. Isso pode envolver o emprego de métodos analíticos ou técnicas computacionais, dependendo da complexidade do modelo.

4.Validação do Modelo:

É preciso comparar as previsões do modelo com dados do mundo real para garantir que ele seja preciso e útil.

5. Interpretação dos Resultados:

É preciso analisar as soluções obtidas e interpretar o significado prático em termos do problema estudado.

6.Utilização do Modelo:

É preciso aplicar (testar) o modelo para fazer previsões, tomar decisões ou entender o comportamento do sistema em diferentes condições.

A modelagem matemática, portanto, representa uma ferramenta poderosa para ganhar insights; fazer previsões; e, otimizar processos em diversas áreas das ciências ambientais.

Observe que existem diferentes tipos de modelos matemáticos (modelos algébricos, diferenciais, integrais, estocásticos, entre outros), a escolha do tipo de modelo vai depender da natureza do problema e das características do sistema em estudo. Fica a dica!

Estudo de Fluxos e Balanços

O estudo de fluxos, como massa e energia, e; balanços (balanço de massa, balanço de energia) refere-se à análise e quantificação de como diferentes quantidades se movem ou são distribuídas dentro de um sistema.

As Ciências Ambientais frequentemente envolvem a análise de fluxos de energia, massa e nutrientes em ecossistemas. O cálculo é utilizado para estudar esses fluxos, calcular balanços e entender como as mudanças em um componente podem afetar todo o sistema.

 Pausa para reflexão!

Consulte o artigo de Negrão (2014) sobre o Estudo do fluxo e descarga de massa de contaminantes em meio saturado através de seções transversais de monitoramento acessando o link: https://www.ige.unicamp.br/terrae/V11/PDFv11/Tv11-Negrao-4.pdf

O artigo apresenta o estado da arte do método que **analisa o fluxo de massa** de contaminantes em meio saturado para projeto de gerenciamento e remediação de uma área contaminada.

Análise de Dados Ambientais

A análise de dados ambientais é uma prática essencial para o estudo das condições ambientais, no monitoramento das mudanças climáticas, por exemplo, ao longo do tempo para se fazer predições e tomada de decisão.

Muitas vezes, os dados ambientais são coletados ao longo do tempo e do espaço requerendo análise mais sistêmica. O cálculo fornece técnicas poderosas para analisar esses dados; identificar padrões; calcular taxas de mudança, e; extrapolar informações importantes para a compreensão de tendências ambientais.

 Pausa para reflexão!

Consulte o artigo de Kato e Bellini (2009) sobre a Atribuição de significados biológicos às variáveis da equação logística: uma aplicação do Cálculo nas Ciências Biológica, acessando o link:
https://www.scielo.br/j/ciedu/a/wW7nRRdpKWLCGVRDwNCypWy/?lang=pt&format=pdf

O artigo apresenta uma proposta **metodológica para o ensino do Cálculo** nos cursos de Ciências Biológicas, que privilegia a atribuição de significados biológicos às variáveis e parâmetros que aparecem nos modelos matemáticos no estudo de dinâmica de populações, para uma compreensão dos fenômenos complexos que podem ser explicados por equações matemáticas bastante simples.

Otimização e Tomada de Decisões

A otimização e a tomada de decisões são áreas interrelacionadas que visam encontrar as melhores soluções para os problemas ambientais deflagrados.

Otimizar refere-se ao processo de encontrar a melhor solução possível para um dado problema, sujeito a algumas restrições. Isso pode envolver a maximização ou minimização de uma função.

Em problemas *univariados*, o objetivo é otimizar uma única variável. O cálculo é frequentemente utilizado para encontrar máximos e mínimos através das derivadas. Agora, em se tratando de problemas mais complexos com múltiplas variáveis, recorre-se ao cálculo vetorial e às técnicas de álgebra linear.

Tomar decisões envolve escolher entre diferentes alternativas, com base em critérios específicos, que tenham informações disponíveis e objetivos ao que se deseja.

Pelo que se observa, a otimização e a tomada de decisões são processos complementares que utilizam métodos matemáticos e analíticos para encontrar as melhores soluções, bem como tomar decisões considerando uma variedade de contextos, sobretudo quando remetidos às ciências ambientais, em que é comum enfrentar problemas complexos que envolvem a otimização de recursos, como a maximização da eficiência na utilização de terras ou a minimização de impactos ambientais. O cálculo ajuda na formulação e resolução de problemas de otimização que surgem nessas situações.

Pausa para reflexão!

Consulte o artigo Otimização do sistema de abastecimento de água da Barragem de Jucazinho através de programação linear, acessando o link:
https://www.sustenere.inf.br/index.php/rica/article/view/CBPC2179-6858.2019.005.0010

Os autores elaboraram o estudo de otimização da distribuição de água, monitorar o comportamento das vazões a partir da otimização, com a elaboração de cenários e verificar o consumo nas cidades abastecidas pelo Sistema de Abastecimento de Água da Barragem de Jucazinho – SAABJ.

Compreensão de Processos Dinâmicos

Muitos processos ambientais são dinâmicos (ciclos biogeoquímicos, mudanças climáticas, sucessão ecológica, erosão e sedimentação do solo, dinâmicas das populações, dinâmica da diversidade, entre outros), ou seja, mudam ao longo do tempo.

O emprego do cálculo, especialmente o cálculo diferencial, é importante para entender e quantificar as taxas de mudança em sistemas ambientais. Isso é fundamental para antecipar e responder as mudanças ambientais, a partir do emprego da modelagem desses processos, para que se possa prevenir mudanças a partir da implementação de estratégias de conservação e de monitoramento.

Pausa para reflexão!

Consulte o livro Modelagem de Sistemas Ambientais, acessando https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=ilbsDwAAQBAJ&oi=fnd&pg=PA1&dq=uso+de+derivadas+para+quantificar+as+taxas+de+mudan%C3%A7a+em+sistemas+ambientais&ots=GH3v9xsGNW&sig=smEfgKotkTJdLMABbfGjfPeNTSY#v=onepage&q&f=false

Ou indo à biblioteca da UFSCar, procurando:

CHRISTOFOLETTI, Antônio. Modelagem de sistemas ambientais. Editora Blucher, 1999.

Contribuição para a Pesquisa Interdisciplinar

As Ciências Ambientais são frequentemente interdisciplinares, envolvendo aspectos da biologia, química, física, geologia e matemática. O cálculo fornece uma linguagem comum e ferramentas matemáticas que permitem a colaboração eficaz entre especialistas de diferentes áreas.

Pausa para reflexão!

Consulte o artigo de Rachelli et al. (2022) sobre o Estudo da integral definida por meio de problemas interdisciplinares do Cálculo com a Físico-Química, acessando o link:
https://doi.org/10.15536/thema.V21.2022.274-288.2359

O artigo investiga como a resolução de problemas, com base na interdisciplinaridade entre o Cálculo e a Físico-Química, contribui para o ensino e aprendizagem do conceito de integral definida.

Pelo que observaram, tanto o cálculo integral como o diferencial, são ferramentas matemáticas que contribuem para a compreensão e a modelagem de fenômenos naturais. A compreensão dos fenômenos naturais a partir desses estudos permite auxiliar na tomada de decisões em gestão ambiental, sobretudo para a questão de sustentabilidade.

No quadro 1, apresentamos, resumidamente, algumas aplicações do cálculo integral nas ciências ambientais.

Quadro 1. Aplicações do Cálculo Integral.

Cálculo de áreas e volumes	Permite determinar áreas sob curvas e volumes de sólidos, o que é essencial em estudos de ecossistemas, como a análise de habitats e a quantificação de biomassa em florestas.
Modelagem de poluentes	As integrais são utilizadas para modelar a dispersão de poluentes em corpos d'água e na atmosfera. Por exemplo, a integral pode ser usada para calcular a concentração total de um poluente em um determinado volume de água ao longo do tempo.
Fluxo de água em bacias hidrográficas	Utilizado na determinação do fluxo de água em rios e lagos, ajudando a modelar o escoamento superficial e a infiltração em solos.
Análise de séries temporais	Em estudos de qualidade ambiental, as integrais podem ser usadas para analisar dados de séries temporais, como a concentração de contaminantes ao longo do tempo, permitindo a avaliação de tendências e a previsão de comportamentos futuros.
Energia e recursos naturais	Aplicado na quantificação de energia gerada por fontes renováveis, como a energia solar e eólica. Isso inclui a integração de funções que descrevem a intensidade da radiação solar ou o vento ao longo de um período.
Ecologia matemática	Em modelos ecológicos, as integrais são usadas para descrever dinâmicas populacionais, como o crescimento e a interação entre espécies, e para calcular a produtividade primária em ecossistemas.
Avaliação de impactos ambientais	Pode ser usado para avaliar o impacto de atividades humanas sobre o meio ambiente, como a quantidade de recursos naturais explorados ou a degradação de habitats.

No quadro 2, algumas aplicações do cálculo diferencial nas ciências ambientais.

Quadro 2. Aplicações do Cálculo Diferencial.

Modelagem de Populações	Utilizado em modelos de crescimento populacional, como as equações logísticas, que ajudam a entender como as populações de espécies mudam ao longo do tempo em resposta a fatores como recursos disponíveis e predação.

Dinâmica de Fluídos	Em relação a análise de como a água flui em corpos hídricos, como rios e aquíferos, envolvendo o uso de derivadas para modelar a taxa de mudança de variáveis como velocidade e volume de água.
Análise de Poluentes	O cálculo diferencial ajuda a modelar a dispersão de poluentes no ar, na água e no solo. As equações diferenciais são usadas para prever como concentrações de poluentes mudam com o tempo e a distância.
Mudanças Climáticas	Os modelos matemáticos que são utilizados para preveem o impacto das mudanças climáticas sobre ecossistemas e fenômenos meteorológicos frequentemente utilizam ferramentas de cálculo diferencial para simular interações complexas entre variáveis ambientais.
Ecologia Matemática	Utilizado para descrever interações entre diferentes espécies e seus ambientes, como predação, competição e simbiose, permitindo a análise de estabilidade e equilíbrio em ecossistemas.
Recursos Naturais	A otimização do uso de recursos naturais, como águas subterrâneas e florestas, pode ser realizada através de modelos que utilizam derivadas para maximizar a sustentabilidade e minimizar impactos ambientais.
Ciências do Solo	Utilizado para modelar processos de erosão, infiltração e transporte de nutrientes no solo, ajudando a prever como esses fatores afetam a qualidade do solo e a produtividade agrícola.
Energia Renovável	Na modelagem de sistemas de energia renovável, como painéis solares e turbinas eólicas, o cálculo diferencial é usado para otimizar a eficiência e prever a produção de energia em diferentes condições ambientais.

Referências

BATSCHELET, E. Introdução à matemática para biocientistas. Trad. Vera Maria Abud Pacífico da Silva e Junia Maria Penteado de Araújo Quitete. São Paulo: Universidade de São Paulo. 1978.

FREITAS, C. A. M.; DE FRAGA SANT'ANA, M. Modelo matemático do crescimento da Araucaria angustifolia. Aplicação da modelagem matemática no ensino do cálculo diferencial e integral/Mathematical model of the growing of Araucaria angustifolia. Aplications of mathematical modelling in the teaching. Acta Scientiae, v. 8, n. 2, p. 39-46, 2006.

MARIANO, E.J. S. et al. Integral de Riemann e algumas aplicações em matemática, física, economia e biologia. 2020.

MODELAGEM AMBIENTAL

O que é Modelagem Ambiental?

A modelagem ambiental é uma ferramenta poderosa que se tornou indispensável para entender e gerenciar os complexos sistemas naturais e as interações entre a atividade humana e o meio ambiente. Ela envolve a construção de representações matemáticas ou computacionais de processos ambientais para prever e analisar o comportamento desses sistemas sob diferentes condições. Através de modelos, cientistas e gestores ambientais podem simular cenários, testar hipóteses e avaliar os impactos potenciais de políticas e intervenções antes de sua implementação.

No contexto das mudanças ambientais globais e da crescente pressão sobre os recursos naturais, a modelagem ambiental assume um papel crucial. O aumento da população, a urbanização acelerada, a industrialização e a exploração dos recursos naturais têm causado impactos significativos nos ecossistemas. Esses impactos incluem a poluição do ar e da água, a perda de biodiversidade, o desmatamento e as mudanças climáticas, que, por sua vez, afetam a qualidade de vida e a sustentabilidade das comunidades humanas.

A modelagem ambiental permite aos cientistas simular essas interações complexas, fornecendo insights sobre como diferentes fatores se combinam para influenciar os sistemas naturais. Por exemplo, modelos climáticos globais ajudam a prever os impactos das emissões de gases de efeito estufa na temperatura global, na precipitação e na frequência de eventos climáticos extremos. Modelos hidrológicos ajudam a prever como o uso da terra e as mudanças climáticas afetarão o ciclo da água, incluindo a disponibilidade de água para consumo humano, agricultura e ecossistemas naturais.

Componentes Fundamentais dos Modelos Ambientais

- **Variáveis de Estado:** as variáveis de estado, ou variáveis de resposta, representam o estado do sistema sob estudo. Em um modelo ambiental, isso pode incluir variáveis como a concentração de poluentes em um corpo d'água, a biomassa de uma floresta ou a temperatura de uma região. Essas variáveis são influenciadas por fatores externos e internos ao sistema.
- **Variáveis Explicativas:** as variáveis explicativas, ou variáveis independentes, são aquelas que influenciam as variáveis de estado. Elas podem incluir fatores como a precipitação, a temperatura, a concentração de nutrientes ou a intensidade de uso da terra. Em um modelo, estas variáveis são usadas para prever ou explicar o comportamento das variáveis de estado.

Tipos de Modelos

Determinístico vs. Estocástico

- **Determinístico**: Um modelo determinístico produz sempre o mesmo resultado para um dado conjunto de condições iniciais e parâmetros. Esses modelos são usados quando as relações dentro do sistema são bem compreendidas e as variáveis de entrada são conhecidas com precisão.
- **Estocástico**: Modelos estocásticos incorporam elementos de incerteza, produzindo diferentes resultados para simulações repetidas com as mesmas condições iniciais. Eles são úteis quando há variabilidade natural ou incerteza nas variáveis de entrada ou nos processos modelados.

Dinâmico vs. Estático

- **Dinâmico**: Modelos dinâmicos consideram mudanças ao longo do tempo, sendo essenciais para entender processos que evoluem, como o crescimento de uma população ou a degradação de um poluente.
- **Estático**: Modelos estáticos assumem que o sistema está em equilíbrio e não mudará com o tempo. Eles são mais simples, mas menos capazes de capturar processos que dependem do tempo.

Mecanicista vs. Estatístico

- **Mecanicista**: Esses modelos são baseados em teorias científicas estabelecidas e tentam explicar a dinâmica de um sistema com base em seus mecanismos subjacentes. Eles são apropriados quando há um bom entendimento dos processos biológicos ou físicos em questão.

- **Estatístico**: Modelos estatísticos não tentam explicar as causas subjacentes, mas sim descrevem relações observadas nos dados. Eles são úteis para identificar padrões e fazer predições em situações onde o mecanismo subjacente é desconhecido ou muito complexo.

Procedimento para Modelagem Ambiental

O processo de modelagem envolve várias etapas essenciais, que são:

1. **Definir o Problema**: Identifique claramente o problema a ser resolvido, as perguntas a serem respondidas, e as variáveis de interesse.
2. **Desenvolver o Modelo Conceitual**: Crie uma representação simplificada do sistema, identificando as variáveis mais importantes e as relações entre elas.
3. **Selecionar o Tipo de Modelo**: Escolha o tipo de modelo mais adequado para o problema em questão, seja ele determinístico ou estocástico, dinâmico ou estático, mecanicista ou estatístico.
4. **Desenvolver o Modelo**: Construa o modelo matemático ou computacional, baseando-se no modelo conceitual e estatístico.
5. **Implementar Computacionalmente**: Utilize software apropriado para implementar o modelo, como MATLAB, R, ou outros pacotes especializados.
6. **Estimar os Parâmetros**: Ajuste os parâmetros do modelo usando dados observacionais ou experimentais.
7. **Avaliar o Modelo**: Teste o modelo comparando suas predições com dados reais, avaliando a precisão e robustez do modelo.
8. **Experimentar e Predizer**: Utilize o modelo para explorar diferentes cenários e prever os resultados de intervenções ou mudanças nas condições do sistema.

Limitações e Considerações na Modelagem Ambiental

Os modelos, embora poderosos, possuem limitações. Eles são simplificações da realidade e podem não capturar todos os aspectos relevantes de um sistema. Além disso, a incerteza nos dados de entrada e nos parâmetros do modelo pode levar a predições menos precisas. Portanto, é crucial usar modelos com um entendimento claro de suas limitações e validar seus resultados com dados reais sempre que possível.

Exemplo 1: Erosão do Solo

1. Definir o Problema

Problema: Prever a taxa de erosão do solo em uma bacia hidrográfica para diferentes práticas de manejo.

2. Desenvolver o Modelo Conceitual

Usaremos a fórmula USLE (*Universal Soil Loss Equation*):

$$E = R \cdot K \cdot LS \cdot C \cdot P$$

Variável de Estado:

- ***E*** (Erosão do solo): Esta é a variável de interesse final que o modelo está tentando prever, expressa em toneladas por hectare por ano.

Variáveis Explicativas:

- ***R*** (Fator de erosividade da chuva): Influencia diretamente a erosão com base na intensidade e quantidade da chuva.
- ***K*** (Fator de erodibilidade do solo): Reflete a suscetibilidade do solo à erosão, dependendo das propriedades do solo.
- ***LS*** (Fator de comprimento e inclinação do terreno): Relaciona-se com a topografia do terreno, influenciando como a água se move e carrega o solo.
- ***C*** (Fator de cobertura do solo): Refere-se à vegetação ou cobertura do solo que protege contra a erosão.
- ***P*** (Fator de prática de manejo): Representa as práticas de conservação do solo aplicadas para reduzir a erosão.

3. Selecionar o Tipo de Modelo

O modelo da Equação Universal de Perda de Solo (USLE) é determinístico porque utiliza uma fórmula fixa que combina fatores específicos (como erosividade da chuva, erodibilidade do solo, comprimento da encosta, entre outros) para calcular a perda de solo. Não há elementos aleatórios ou incerteza incorporada diretamente na fórmula.

O modelo é estático porque calcula a perda de solo para um período específico (geralmente anual) e não considera como a erosão muda ao longo do tempo. Ele fornece uma estimativa para um ponto ou período fixo, sem incorporar a evolução do processo ao longo do tempo.

O modelo é estatístico porque foi desenvolvido a partir de análises empíricas e observacionais de erosão em diferentes condições, e os fatores utilizados na equação são ajustados com base em dados experimentais e observacionais. Ele não é baseado em uma descrição física detalhada dos processos de erosão, mas sim em uma relação empírica entre os fatores envolvidos.

4. Desenvolver o Modelo

A fórmula USLE é:

$$E = R \cdot K \cdot LS \cdot C \cdot P$$

5. Implementar Computacionalmente

Vamos usar MATLAB para calcular a erosão com os seguintes valores:

```
****************************************
%% matlab code
```

```
% variáveis explicativas
R = 200;
K = 0.35;
LS = 1.2;
C = 0.5;
P = 1.0;

% modelo
E = R * K * LS * C * P;

% mostrar resultado
disp(E);
```
****

- $R = 200$ (fator de erosividade da chuva)
- $K = 0{,}35$ (fator de erodibilidade do solo)
- $LS = 1{,}2$ (fator de comprimento e inclinação do terreno)
- $C = 0{,}5$ (fator de cobertura do solo)
- $P = 1{,}0$ (fator de prática de manejo)

6. Estimar os Parâmetros

Os parâmetros são fornecidos e estimados com base em dados históricos e características do terreno.

7. Avaliar o Modelo

Verifique a precisão comparando o valor calculado com dados reais de erosão coletados em campo.

8. Experimentar e Predizer

Simule diferentes cenários alterando C e P. Por exemplo, se a cobertura do solo (C) melhorar para 0,3, o novo cálculo seria:

****
```
%% matlab code
C = 0.3;

% modelo
E = R * K * LS * C * P;

% mostrar resultado
disp(E);
```
****

Com $C = 0,3$:

$$E = 200 \cdot 0{,}35 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 1{,}0$$

$$E = 200 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}36$$

$$E = 200 \cdot 0{,}126$$

$$E = 25{,}6 \; ton \; por \; ha/ano$$

<u>Exemplo 2: Fluxo de um Rio</u>

1. Definir o Problema

Problema: Estimar o fluxo (vazão) de um rio em um ponto específico ao longo de um período de tempo, com base em variáveis hidrológicas conhecidas.

Perguntas a serem respondidas:

- Qual será a vazão do rio em diferentes condições de precipitação?
- Como as mudanças no uso da terra na bacia hidrográfica afetam o fluxo do rio?

Variáveis de Interesse:

- **Vazão do rio (Q)**: Quantidade de água fluindo pelo rio em um determinado ponto, geralmente medida em metros cúbicos por segundo (m^3/s).

2. Desenvolver o Modelo

O fluxo do rio pode ser estimado usando uma versão simplificada da equação de escoamento superficial, que relaciona a vazão com a precipitação, a área da bacia e o coeficiente de escoamento.

O modelo conceitual assume que a precipitação que cai sobre uma bacia hidrográfica gera um escoamento proporcional à área da bacia e ao coeficiente de escoamento, que depende do tipo de solo e da cobertura do terreno.

Variável de Estado:

- **Vazão do rio ($\boldsymbol{Q}$)**: Representa a condição ou resultado que estamos modelando.

Variáveis Explicativas:

- **Precipitação ($\boldsymbol{P}$)**: Influencia diretamente a quantidade de água disponível para escoamento.
- **Área da bacia ($\boldsymbol{A}$)**: Determina a quantidade total de área que contribui para o escoamento.
- **Coeficiente de escoamento ($\boldsymbol{C}$)**: Reflete a eficiência com que a precipitação se transforma em escoamento superficial, afetado pelo tipo de solo, uso do solo, etc.

3. Selecionar o Tipo de Modelo

Um modelo determinístico simples baseado na equação de escoamento:

$$Q = C \cdot P \cdot A$$

onde:

- $\boldsymbol{Q}$ é a **vazão do rio** (m^3/s)
- $\boldsymbol{C}$ é o **coeficiente de escoamento** (adimensional)

- ***P*** é a **precipitação média** sobre a bacia (m/s)
- ***A*** é a **área da bacia hidrográfica** (m²)

O exemplo do fluxo do rio descrito foi baseado em uma fórmula simples onde as variáveis (precipitação, coeficiente de escoamento e área da bacia) são usadas para calcular o fluxo do rio sem incorporar elementos de variabilidade ou incerteza diretamente no modelo.

O modelo fornecido calcula o fluxo do rio em um momento específico ou para um cenário específico, sem considerar como essas variáveis podem mudar ao longo do tempo. Portanto, é estático.

Embora o modelo não seja complexo e não inclua todas as forças físicas envolvidas, ele se baseia em uma formulação direta das relações entre variáveis (precipitação, área da bacia, e coeficiente de escoamento) e fornece uma estimativa do fluxo com base em uma abordagem mecânica e direta.

4. Desenvolver o Modelo
A fórmula para a vazão do rio é:

$$Q = C \cdot P \cdot A$$

5. Implementar Computacionalmente
Vamos supor os seguintes valores:

- Precipitação média $P = 0{,}002\, m/s$
- Área da bacia $A = 50 \times 106\, m^2$ (ou 50 km^2)
- Coeficiente de escoamento $C = 0{,}7$

Podemos calcular a vazão Q no MATLAB da seguinte maneira:

```
***************************************
%% matlab code
P = 0.002; % Precipitação em m/s
A = 50e6; % Área da bacia em m²
C = 0.7; % Coeficiente de escoamento

% modelo
Q = C * P * A;

% mostrar resultado
disp(Q);
***************************************
```

6. Estimar os Parâmetros

- **Precipitação P**: Obtida de dados meteorológicos históricos.
- **Área da bacia A**: Medida a partir de mapas topográficos ou imagens de satélite.
- **Coeficiente de escoamento C**: Determinado com base no tipo de solo, cobertura vegetal, e uso da terra na bacia hidrográfica.

7. Avaliar o Modelo

Compare a vazão estimada pelo modelo com medições reais de vazão no rio para verificar a precisão. Ajuste os parâmetros, se necessário, para melhorar a correspondência.

8. Experimentar e Predizer

- **Cenário 1**: Se a precipitação aumentar para $0{,}003\, m/s$.
- **Cenário 2**: Se o coeficiente de escoamento aumentar devido à urbanização, digamos $C = 0{,}8$, a vazão será quanto?

```
%% R code

set.seed(123) # Para reprodutibilidade

emissao <- 120 # kg/h

tempo <- 24 # Horas condicoes_meteorologicas <- rnorm(tempo, mean=7, sd=1) # Velocidade do vento em m/s

concentracao <- emissao / (1 + condicoes_meteorologicas) # Exemplo simplificado

mean(concentracao) # Média da concentração esperada
```

Resultado dos Cálculos:

- **Vazão Original**:

$$Q = 0{,}7 \times 0{,}002 \times 50 \times 10e6$$
$$Q = 70\, \frac{m^3}{s}$$

- **Cenário 1** (Precipitação aumentada):

$$Q = 0{,}7 \times 0{,}003 \times 50 \times 10e6$$
$$Q = 105\, \frac{m^3}{s}$$

- **Cenário 2** (Coeficiente de escoamento aumentado):

$$Q = 0{,}8 \times 0{,}003 \times 50 \times 10e6$$
$$Q = 120\,\frac{m^3}{s}$$

<u>Exemplo 3: Poluição do Ar</u>

1. Definir o Problema

Problema: Modelar a concentração de poluentes atmosféricos para prever a poluição em diferentes áreas da cidade.

2. Desenvolver o Modelo Conceitual

O modelo considera a dispersão dos poluentes como um processo estocástico, influenciado por condições meteorológicas.

3. Selecionar o Tipo de Modelo

Modelo estocástico com dispersão gaussiana e processos de Markov para condições variáveis.

A poluição do ar é tipicamente modelada como um processo dinâmico, uma vez que a concentração de poluentes muda ao longo do tempo devido a fatores como mudanças nas emissões, condições meteorológicas e reações químicas atmosféricas. Modelos dinâmicos simulam a evolução das concentrações de poluentes ao longo do tempo.

Modelos de poluição do ar muitas vezes são mecanicistas quando usam equações baseadas em leis físicas e químicas, como a dispersão de poluentes em função do vento e da turbulência atmosférica, ou as reações químicas que ocorrem na atmosfera. Eles podem descrever detalhadamente o comportamento dos poluentes com base em princípios físicos e químicos.

4. Desenvolver o Modelo

Usaremos um modelo de dispersão gaussiana com ruído estocástico.

5. Implementar Computacionalmente

Vamos implementar o modelo em R. Suponhamos que a emissão de poluentes seja constante e as condições meteorológicas variem.

```
***************************************
# R code

set.seed(123) # Para reprodutibilidade

emissao <- 100 # kg/h

tempo <- 24 # Horas condicoes_meteorologicas <- rnorm(tempo, mean=5, sd=1) #
Velocidade do vento em m/s
```

```
concentracao <- emissao / (1 + condicoes_meteorologicas) # Exemplo simplificado
mean(concentracao) # Média da concentração esperada
*************************************
```

6. Estimar os Parâmetros

- Emissão de poluentes: $100\ kg/h$
- Condições meteorológicas: velocidade do vento média de $5\ m/s$ com desvio padrão de $1\ m/s$.

7. Avaliar o Modelo

Compare as concentrações simuladas com medições reais de poluentes.

8. Experimentar e Predizer

Simule diferentes cenários de emissão e velocidade do vento. Por exemplo, para uma emissão de $120\ kg/h$ e uma velocidade do vento média de $7\ m/s$:

Se a média da concentração calculada for, por exemplo, 50 kg/m³, isso indica a concentração esperada sob as novas condições.

Exemplo 4: Dispersão de Poluentes em um Lago

1. Definir o Problema

Problema: Estimar a concentração de um poluente em diferentes pontos de um lago ao longo do tempo, levando em consideração a variabilidade natural nos processos de dispersão e as fontes de poluição.

Perguntas a serem respondidas:

- Como a concentração do poluente varia em diferentes partes do lago ao longo do tempo?
- Como as flutuações na vazão dos afluentes e as mudanças nas condições meteorológicas afetam a dispersão do poluente?

Variáveis de Interesse:

- Concentração de poluente ($C(t, x, y)$): A concentração do poluente em diferentes pontos no tempo e no espaço.

2. Desenvolver o Modelo Conceitual

O modelo de dispersão estocástica considera a concentração do poluente no lago como sendo influenciada por processos de difusão e advecção, que são afetados por condições variáveis como vento, vazão dos rios que alimentam o lago, e atividades humanas.

Em vez de considerar valores fixos, as variáveis explicativas são modeladas como processos estocásticos, incorporando incertezas e variabilidade.

Variável de Estado:

- **Concentração de poluente $\boldsymbol{C(t,x,y)}$**: Representa a condição do sistema que estamos modelando ao longo do tempo e espaço.

Variáveis Explicativas:

- **Coeficiente de difusão $\boldsymbol{D}$**: Influencia como o poluente se espalha pelo lago.
- **Velocidade da corrente $\boldsymbol{v}$**: Determina como o poluente é transportado pelas correntes no lago.
- **Fonte de poluente $\boldsymbol{S(x,y)}$**: Representa a quantidade de poluente sendo introduzida no sistema.
- **Termo estocástico $\boldsymbol{\epsilon(t,x,y)}$**: Captura a incerteza e a variabilidade aleatória no processo de dispersão.

3. Selecionar o Tipo de Modelo

Um modelo estocástico de dispersão de poluentes que pode ser representado por uma equação diferencial parcial estocástica (EDP Estocástica), onde a difusão do poluente é modelada usando termos aleatórios para refletir a incerteza.

O modelo básico para a concentração de poluentes pode ser escrito como:

$$\frac{\partial C(t,x,y)}{\partial t} = D\nabla^2 C(t,x,y) - v \cdot \nabla C(t,x,y) + S(x,y) + \epsilon(t,x,y)$$

onde:

- $\boldsymbol{C(t,x,y)}$: Concentração do poluente no tempo t e na posição (x,y)
- $\boldsymbol{D}$: Coeficiente de difusão, determinando como o poluente se espalha
- $\boldsymbol{v}$: Vetor velocidade da corrente no lago
- $\boldsymbol{S(x,y)}$: Termo de fonte, representando a entrada de poluentes em diferentes pontos
- $\boldsymbol{\epsilon(t,x,y)}$: Termo estocástico, que representa a incerteza ou variabilidade aleatória

O modelo de poluição do rio geralmente é dinâmico, já que considera como a poluição varia ao longo do tempo e do espaço. Ele simula a evolução das concentrações de poluentes com base em variáveis que mudam ao longo do tempo.

Se o modelo usa distribuições de probabilidade e análises baseadas em dados para capturar a variabilidade e incerteza no sistema, ele é estatístico. Isso significa que o modelo não se baseia apenas em leis físicas, mas também usa dados empíricos e análises estatísticas para estimar o comportamento dos poluentes.

4. Desenvolver o Modelo

Vamos considerar um cenário simplificado onde o lago é alimentado por um rio e a fonte de poluente é constante, mas a difusão e a advecção variam estocasticamente ao longo do tempo.

Podemos simular a concentração do poluente em um ponto específico, considerando que D e v seguem distribuições normais, refletindo a variabilidade natural.

5. Implementar Computacionalmente

Um exemplo de implementação estocástica em MATLAB poderia ser:

```
***************************************

%% matlab code

% Parâmetros do modelo
D_mean = 0.1; % Coeficiente de difusão médio
D_std = 0.02; % Desvio padrão do coeficiente de difusão
v_mean = 0.05; % Velocidade média da corrente
v_std = 0.01; % Desvio padrão da velocidade

% Geração de valores estocásticos para D e v
D = normrnd(D_mean, D_std);
v = normrnd(v_mean, v_std);

% Parâmetros adicionais
S = 1.0; % Taxa de fonte de poluente
t = 0:0.1:10; % Tempo

% Simulação da concentração de poluentes
C = zeros(size(t));
for i = 2:length(t)
      epsilon = normrnd(0, 0.01); % Termo estocástico
      C(i) = C(i-1) + (D * -2 * C(i-1) + v * -C(i-1) + S + epsilon) * (t(i) - t(i-
      1));
end
% Exibir os resultados
plot(t, C);
xlabel('Tempo');
ylabel('Concentração de Poluente'); title('Simulação Estocástica da
Dispersão de Poluentes no Lago');
***************************************
```

6. Estimar os Parâmetros

- **Coeficiente de difusão D** e **velocidade da corrente v**: Estimados com base em dados históricos e variabilidade observada.
- **Fonte de poluente S**: Obtida a partir de dados de emissões.

7. Avaliar o Modelo

O modelo é avaliado comparando a concentração prevista pelo modelo em diferentes pontos do lago com medições reais. A variabilidade natural observada nas medições pode ser usada para ajustar a magnitude do termo estocástico $\epsilon(t, x, y)$.

8. Experimentar e Predizer

Simulações podem ser executadas para diferentes cenários, como aumento na fonte de poluentes S ou mudanças na variabilidade da corrente v, para entender como essas mudanças impactam a concentração do poluente.

<u>**Exemplo 5: Crescimento Populacional de Espécies**</u>

1. Definir o Problema

Problema: Estimar o crescimento populacional de uma espécie em um ecossistema ao longo do tempo, considerando a taxa de crescimento e a capacidade de suporte do ambiente.

Perguntas a serem respondidas:

- Como a população da espécie evoluirá nos próximos anos?
- Quais fatores limitam o crescimento da população?

Variáveis de Interesse:

- População $N(t)$

2. Desenvolver o Modelo Conceitual

O crescimento populacional é um processo dinâmico que muda com o tempo e é influenciado por fatores como taxa de natalidade, mortalidade, e recursos disponíveis.

Variável de Estado:

- **População $\boldsymbol{N(t)}$**: Representa a quantidade de indivíduos ao longo do tempo.

Variáveis Explicativas:

- **Taxa de crescimento $\boldsymbol{r}$**: Determina a velocidade de crescimento da população.
- **Capacidade de suporte $\boldsymbol{K}$**: Limita o crescimento da população devido à escassez de recursos.

3. Selecionar o Tipo de Modelo

O modelo logístico é um modelo dinâmico comum para descrever o crescimento populacional:

$$\frac{dN(t)}{dt} = r \cdot N(t) \cdot (1 - \frac{N(t)}{K})$$

onde:

- $N(t)$ é a população no tempo t
- r é a taxa intrínseca de crescimento
- K é a capacidade de suporte do ambiente

O modelo de crescimento populacional logístico, que foi mencionado anteriormente, é determinístico. Ele usa uma fórmula fixa para calcular o crescimento da população com base em uma taxa de crescimento constante r e uma capacidade de suporte K. O modelo não incorpora variabilidade aleatória ou incertezas diretamente nas equações.

O modelo de crescimento populacional é dinâmico porque descreve como a população muda ao longo do tempo. Ele simula a evolução da população em função do tempo, levando em conta como a taxa de crescimento e a capacidade de suporte afetam o número de indivíduos ao longo do tempo.

O modelo logístico de crescimento populacional é mecanicista na medida em que se baseia em uma formulação matemática que descreve o processo de crescimento populacional com base em princípios biológicos e ecológicos. A equação utiliza parâmetros específicos para representar o crescimento e a limitação de recursos, seguindo um conjunto de regras e leis sobre como as populações se comportam.

4. Desenvolver o Modelo

A equação diferencial acima pode ser resolvida numericamente para prever a população ao longo do tempo.

5. Implementar Computacionalmente

Aqui está um exemplo de implementação no MATLAB:

```
***************************************

%% matlab code

matlab
Copiar código
r = 0.1;  % Taxa de crescimento
K = 1000;  % Capacidade de suporte
N0 = 50;  % População inicial
tspan = [0 100];  % Intervalo de tempo

% Função para a equação diferencial
logisticGrowth = @(t, N) r * N * (1 - N / K);

% Resolver a equação diferencial
[t, N] = ode45(logisticGrowth, tspan, N0);

% Plotar os resultados
plot(t, N);
xlabel('Tempo');
ylabel('População');
title('Crescimento Populacional Dinâmico');
***************************************
```


```
% Plotar os resultados
plot(t, N);
xlabel('Tempo');
ylabel('População');
title('Crescimento Populacional Dinâmico');
```


6. Estimar os Parâmetros

- **Taxa de crescimento r**: Estimada com base em dados históricos de crescimento populacional.
- **Capacidade de suporte K**: Determinada pela disponibilidade de recursos e espaço no ambiente.

7. Avaliar o Modelo

O modelo é avaliado comparando as previsões com dados históricos de população, ajustando r e K conforme necessário.

8. Experimentar e Predizer

O modelo pode ser utilizado para prever o impacto de mudanças ambientais (como perda de habitat) na população.

Referências

WAINWRIGHT, John; MULLIGAN, Mark. *Environmental Modelling: Finding Simplicity in Complexity*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2004.

WAINWRIGHT, John; MULLIGAN, Mark. *Introduction to Environmental Modelling*. [S.l.]: Oxford University Press, 2013.

NAGGARA, Hamdi; MALANSON, George P. *Environmental Modeling with GIS and Remote Sensing*. [S.l.]: CRC Press, 2015.

HERSHBERGER, Robert M. *Principles of Environmental Modeling and Simulation*. [S.l.]: Elsevier, 2022.

DEATON, Michael L.; TRAVIS, William L. *Environmental Modeling: A Practical Introduction*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1992.

FRAGOSO JR., Carlos Ruberto; FERREIRA, Tiago Finkler; MARQUES, David da Motta. *Modelagem Ecológica em Ecossistemas Aquáticos*. São Paulo: Oficina de Textos, 2009. 304 p.

JØRGENSEN, Sven Erik. *Fundamentals of Ecological Modelling: Applications in Environmental Management and Research*. 4ª ed. Elsevier, 2011.

EXERCÍCIOS

Grupo 1 - Aritmética

1. A idade de cada um dos três filhos de Paulo é um número inteiro. A soma destes três inteiros é igual a 12 e seu produto e 30. Qual a idade de cada um dos seus três filhos?

2. Em qual das alternativas abaixo o algarismo 5 do número listado tem o valor de 500 unidades?
a) 135.120;
b) 5.210;
c) 20.501;
d) 25.100.

3. Enem 2017. As empresas que possuem Serviço de Atendimento ao Cliente (SAC), geralmente informam ao cliente que utiliza oserviço um número de protocolo de atendimento. Esse número resguarda o cliente para eventuais reclamações e é gerado consecutivamente, de acordo com os atendimentos executados. Ao término do mês de janeiro de 2012, uma empresa registrou como último protocolo do SAC o número **390.978.467**. Do início do mês de fevereiro até o final do mês de dezembro de 2012, foram abertos **22.580** novos números de protocolos. O algarismo que aparece na posição da dezena de milhar do último número de protocolo de atendimento registrado pela empresa em 2012 é:
a) 0;
b) 2;
c) 4;
d) 6;
e) 8.

4. Na conta abaixo, cada letra representa um algarismo não nulo. Qual é o algarismo representado pela letra C?
U F C + U F = 5 0 1
a) 1.
b) 4.
c) 5.
d) 6.
e) 7.

5. João e Cândido estão usando uma balança de mola para pesar suas mochilas.
Quando pesadas separadamente, a balança mostra 3 kg e 2 kg; quando são pesadas juntas, a balança mostra 6 kg.
– “Isto não pode estar certo", disse Cândido. “Dois mais três não é igual a seis!”
– “Você não está vendo?", respondeu João. “O ponteiro da balança não está no zero.”
Quanto as mochilas pesam de fato?
a) 2 kg e 1 kg.
b) 3 kg e 2 kg.
c) 4 kg e 3 kg.
d) 5 kg e 4 kg.
e) 6 kg e 5 kg.

6.(XAVIER et al., 2020) Efetue as seguintes operações:
a) $7/6 - 1$
b) $5/8 \div 1/3$
c) $14/12 \times 24/ 7$

d) 3/5 – 1/5 × (2/3 – 1/2)

7. (GUERRA, 2016) Resolva as expressões:
a) 3^4 x 3^{-2}
b) $(5^{-3})^6$
c) $\left(\frac{-3}{5}\right)^9$ x $\left(\frac{-3}{5}\right)^{-7}$

8.(SILVA; CAVALHEIRO, 2012) Considerando os seguintes intervalos, efetue as operações:
A =]−∞, 2]; B = [−3, +∞[; C = [0, 3]; D =]−2, 2[
a) $A \cap B$
b) $B - C$
c) $(A \cup B) \cap C$
d) $(B \cap C) \cup (C \cap D)$

9. (GUERRA, 2016) Sejam os conjuntos A = {1, 4, 9} e B = {-2, 2, 3} e a relação $R = \{(x, y) \in A\ x\ B \mid x + y \leq 6\}$, determine:
a) R
b) D(R)
c) Im(R)
d) R^{-1},D(R^{-1}),Im(R^{-1})

10. (XAVIER et al., 2020) Gasto 2/5 do meu salário com aluguel da casa, e 1/2 dele com outras despesas. Fico ainda com R$ 200,00 no final do mês. Qual é o valor do meu
salário?

Respostas

1. Sejam a, b e c as idades dos tres filhos de Paulo. Então: a + b + c = 12 ; abc = 30
Os divisores de 30 são: {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}. Como se tratam de inteiros positivos e a soma deles e 12, segue que a, b, c ∈ {1, 2, 3, 5, 6, 10}. Como o produto e 30, necessariamente um deles deve ser múltiplo de 5. Se um deles é10, para que o produto seja 30, os outros so podem ser 1 e 3. Isso nao satisfaz a condição da soma das idades. Portanto, uma das idades é 5. Portanto, o produto das outras duas é 30/5 = 6. As únicas possibilidades são 2 e 3 ou 1 e 6. A primeira não é possível em virtude da condição da soma das idades. Portanto, as três idades são **2**, **3** e **5**.
2. Percorrendo os algarismos de um número a partir da direita, o algarismo 5 tem o valor de 5 unidades quando está na primeira posição, de 50unidades quando ocupa a segunda posição, de 500 unidades quando se encontra na terceira posição, e assim por diante. Logo a alternativa que apresenta um número em que o algarismo 5 vale 500 unidades é a letra c).
3. 390.978.467 + 22.580 = 391.001.047.
Assim, a posição referente à dezena de milhar (10.000) no número 391.001.047, que é a quinta posição da direita para a esquerda, é ocupada pelo algarismo 0.Logo, a alternativa correta é a letra a).
4. Sabendo que os algarismos são todos não nulos, podemos observar que:
• Somando os algarismos das unidades, obtemos C + F = 11, ou seja, C e F são tais que na casa das unidades do resultado fica um e vai um;
• Somando os algarismos das dezenas, obtemos 1 + F + U = 10, ou seja, F e U são tais que na casa das dezenas do resultado fica zero e vai um;
• Somando os algarismos das centenas, obtemos 1 + U = 5.
Assim, U = 5 − 1 = 4, F = 10 − 1 − U = 5 e C = 11 − F = 6. Portanto, a alternativa correta é a d).
5. Se X é o valor exibido na balança quando nenhum peso está sobre ela, então as informações apresentadas podem ser expressas assim:
– Quando a mochila de João é pesada, a balança mostra seu peso real somado a X (veja que, se X for negativo, então isso significa que a balança mostra menos que o peso real). Portanto, o peso real da mochila de João é 3 − X.
– Quando a mochila de Cândido é pesada, a balança mostra seu peso real somado a X (novamente aqui, se X for negativo, então isso significa que a balança mostra menos que o peso real). Portanto, o peso real da mochila de Cândido é 2 − X.
– Quando as duas mochilas são pesada juntas, a balança mostra a soma de seus pesos reais acrescida de X. Portanto, a soma dos pesos reais das mochilas é 6 − X.
Assim,
6 − X = (3 − X) + (2 − X) = 5 − 2X, o que nos dá:
2X − X = 5 − 6, isto é, X = −1.
Portanto, as mochilas de João e Cândido pesam, efetivamente, 3 − (−1) = 4 kg e 2 − (−1) = 3 kg, respectivamente. A alternativa correta é c).
6. a) 1/6; b) 15/8; c) 4; d) 17/30.

7. a) 9; b) $1/5^{18}$; c) 9/25.
8. a) $[-3, 2]$; b) $[-3, 0[\cup]3, +\infty[$; c) $[0, 3]$; d) $[0, 3]$
9. R = {(1, -2), (1, 2), (1, 3), (4, -2), (4, 2)}; b) D(R) = {1, 4}; c) Im(R) = {-2, 2, 3}; d) R^{-1}= {(-2, 1), (2, 1), (3, 1), (-2, 4), (2, 4)}; D(R^{-1}) = {-2, 2, 3}; Im(R^{-1}) = {1, 4}.
10. 2000 reais

Para mais exercícios, pesquise o link:
https://precalculojlle.paginas.ufsc.br/files/2018/11/Coletanea_Exercicios_Matematica_Basica.pdf

Grupo 2 – Proporção entre Grandezas

1.Uma roda dá 80 voltas em 20 minutos. Em 28 minutos, quantas voltas essa roda dará?

2.Com 8 eletricistas podemos fazer a instalação de uma casa em 3 dias. Quantos dias levarão 6 eletricistas, para fazer o mesmo trabalho?

3.Com 6 pedreiros podemos construir uma parede em 8 dias. Quantos dias gastarão 3 pedreiros para fazer a mesma parede?

4.Uma fábrica engarrafa 3.000 refrigerantes em 6 horas. Quantas horas levará para engarrafar 4.000 refrigerantes?

5. Quatro marceneiros fazem um armário em 18 dias. Em quantos dias 9 marceneiros fariam o mesmo armário?

6.Numa indústria têxtil, 8 alfaiates fazem 360 camisas em 3 dias, quantos alfaiates são necessários para que sejam feitas 1.080 camisas em 12 dias?

7. Um ciclista percorre 150 km em 4 dias, pedalando 3 horas por dia. Em quantos dias faria uma viagem de 400 km, pedalando 4 horas por dia?

8. Uma máquina fabricou 3.200 parafusos, trabalhando 12 horas por dia, durante 8 dias. Quantas horas deverá trabalhar por dia, para fabricar 5.000 parafusos em 15 dias?

9. Três torneiras enchem uma piscina em 10 horas. Quantas horas levarão 10 torneiras para encher duas piscinas?

10. Uma equipe composta de 15 homens extrai, em 30 dias, 3,6 toneladas de carvão. Se for aumentada para 20 homens, em quantos dias conseguirão extrair 5,6 toneladas de carvão?

Respostas

1. 112 voltas
2. 4 dias
3. 16 dias
4. 8 horas
5. 8 dias
6. 6 alfaiates
7. 8 dias
8. 10 horas
9. 6 horas
10. 35 dias

Grupo 3 – Medições

1. A distância em linha reta entre as cidades de São Paulo e Rio de Janeiro é de, aproximadamente, 357,37 km (quilômetros). Esta mesma distância em metros é igual a:

2. Transforme 1 275 mm (milímetros) em dm (decímetros).

3. Uma garrafa térmica com capacidade de 1,5 l (litros) será utilizada para servir café aos participantes de uma reunião. A bebida será servida em xícaras de 60 ml (mililitros). Determine a quantidade de xícaras que poderão ser servidas.

4. Transforme a medida de 457 ml (mililitros) em l (litros).

5. Nas escolas, é comum dividir o tempo de estudo em aulas de 50 min (minutos). Se um estudante assiste 6 aulas por dia e estuda 5 dias em uma semana, o número de horas que ele estará em sala de aula será de:

6. Um caminhão está transportando 5,5 T (toneladas) de trigo. Esta massa de trigo em kg (quilogramas) e g (gramas) é de:

7. Uma escala cartográfica representa uma paisagem em um mapa. Para isso, é realizada a redução de medidas proporcionalmente. Por exemplo, em uma escala 1:100.000 significa que 1 cm no mapa corresponde à 100 000 cm na paisagem real, que em km é igual a:
a) 1 km
b) 0,1 km
c) 10 km
d) 0,01 km

8. Os refrigerantes são bebidas a base de água e açúcar. Um refrigerante de 350 ml possui cerca de 37000 mg de açúcar. Essa quantidade, em gramas, corresponde a:
a) 370 g
b) 0,37 g
c) 37 g
d) 3,7 g

9. Usain Bolt é um atleta jamaicano famoso por ganhar provas de velocidade e considerado o homem mais rápido do mundo. Em 2009, o velocista bateu o recorde ao realizar a prova de 100 metros em 9,58 segundos, que seria, em minutos, cerca de
a) 0,14 min
b) 0,12 min
c) 0,16 min
d) 0,17 min

10. O Vaticano é o menor país do mundo. Embora esteja localizado dentro da cidade de Roma, na Itália, o território conhecido como a sede da Igreja Católica é independente e apresenta uma área de 0,44 km^2, que em m^2 corresponde a
a) 4 400 m^2
b) 44 000 m^2
c) 440 m^2
d) 440 000 m^2

Respostas

1. 357 370 m
2. 12,75 dm
3. 25 xícaras
4. 0,457 l
5. 25h
6. 5 500 kg e 5 500 000 g
7. 1 km
8. 37 g
9. 0,16 min
10. 440 000 m^2

Grupo 4 – Funções

1. Carlos é lojista e ganha um salário mensal de R$ 3.000,00. Além disso, a cada produto em destaque vendido, ele ganha uma comissão de 3%. Se ele vendeu 120 peças em destaque, qual será o seu salário neste mês?

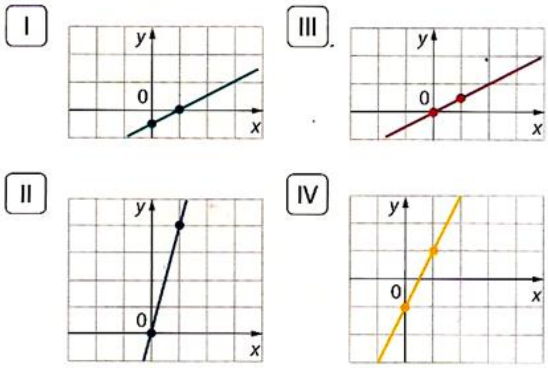
2. As leis ou fórmulas matemáticas e os gráficos cartesianos são funções polinomiais do 1º grau ou chamadas também de função afim. Faça a associação de cada função A , B , C e D , com seu respectivo gráfico cartesiano I , II , III e IV.

A $y = 2x - 1$

B $y = \frac{1}{2}x$

C $y = 4x$

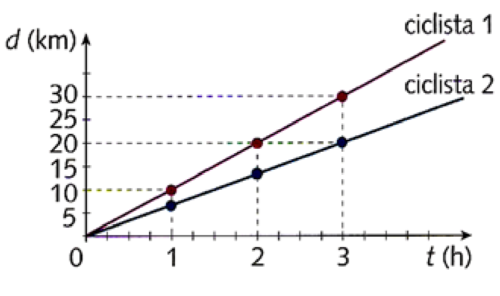
D $y = \frac{x-1}{2}$



3. O sindicato de trabalhadores de uma empresa sugere que o piso salarial da classe seja de R$ 1800, propondo um aumento percentual fixo por cada ano dedicado ao trabalho. A expressão que corresponde à proposta salarial (s), em função do tempo de serviço (t), em anos, é s(t) = 1800 (1,03)t
De acordo com a proposta do sindicato, o salário de um profissional de empresa com 2 anos de tempo de serviço será, em reais,
a) 7416,00.
b) 3819,24.
c) 3709,62.
d) 3708,00.
e) 1909,62.

4. Considere a função de variável real f(x) = (3x + 8)/2. Qual o valor de f-1(10)?
a) 1 ⁄ 19
b) 6
c) 0,25
d) 4
e) 19

5. O gráfico representado na figura, são duas funções afins, de 1º grau, que descreve o deslocamento de dois ciclistas, em quilômetros, transcorridas em determinado tempo.



Baseado no gráfico, responda as seguintes perguntas:

a) Qual é a distância percorrida pelo ciclista 1 no percurso de duas horas?
b) Qual é a distância entre o ciclista 1 e o ciclista 2, após três horas em relação ao ponto de partida?

Respostas

1. R$ 3003,60.
2. A = IV; B = III; C = II; D = I
3. 1909,62.
4. 4
5. a) 20 km; b)10 km

Grupo 5 – Taxa de Variação e Derivadas

1. Encontre a equação da reta que passa pelos pontos A = (1, 2) e B = (−1, 4)

2. Seja P = (−2, 5) um ponto da reta r, que é paralela a reta x − 6 y = 1. Encontre a equação da reta r.

3. Considere a função f(x) = 6 x – x 2 e o ponto P = (1, 5) do gráfico de f.
a) Desenhe o gráfico de f e as retas secantes que passam pelo ponto P e os pontos Q = (x, f(x)) para x = 1/2, 3/2 e 2
b) Encontre o coeficiente angular de cada reta secante do item (a)

4. Para cada função, f(x), determine a derivada f'(x0) no ponto indicado:
a) f(x)= x^2 com x0= 4
b) f(x)= 2x+ 3 com x0= 3
c) f(x)= x^2 – 3x + 4 com x0= 6
d) f(x)= x^2 - 4x com x0= 4

5. Obtenha a derivada de cada função:
a) f(x) = 10
b) f(x) = $10x^5$
c) f(x) = $1/2x^2$
d) f(x) = $5u^3$ $-2u^2$ + 6u +7

6. Derive a função: y = x^2 - 3x
a) y' = $2x^2$ - 3
b) y'= 2x - 3x
c) y' = 2x - 3
d) y'= 2x + 3
e) y'= $2x^3$ + 3

7. Derive a função: y = 1 / (x+2)
a) y'= 1/ x +2
b) y'= - 1/ x +2
c y'= 1/ x +2
d) y'= $1/ (x +2)^2$
e) y'= $- 1/ (x +2)^2$

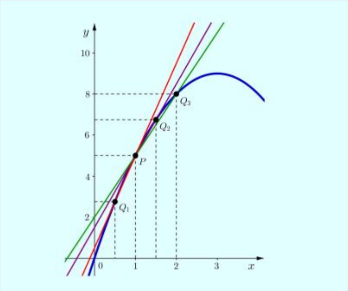
8. Derive a função: y = x^2+3 / x^2-1
a) y'= 8/ 2x -1
b) y'= - 8/ 2x -1
c) y'= - 8x/ $(x^2 -1)$
d) y'= - 8x/ $(2x -1)^2$
e) y' = - 8x/ $(x^2 -1)^2$

9. Derive a função: y = (3 + x) (2 - x)
a) y´= 2x - 3

b) y´= 2x - 1
c) y´= -2x - 1
d) y´= 2x + 3
e) y´= 2x ² + 3

Respostas

1. y = -x + 3
2. y = x/6 + 16/3
3. a)



b) m1 = 4,5; m2 = 3,5 ; m3 = 3,0
4. a) 8; b) 2; c) 9 d) 4
5. a) f(x) = 0; b) f(x) = $50x^4$; c) f(x) = x; d) f(x) = $15u^2$ - 4u +
6. c) y' = 2x - 3
7. e) y'= - 1/ $(x +2)^2$
8. e) y' = - 8x/ $(x^2 -1)^2$
9. c) y´= -2x - 1

Exercícios Práticos

1) A população de uma espécie em um ecossistema cresce de acordo com a função $P(t) = P_0 e^{rt}$, onde P_0 é a população inicial, r é a taxa de crescimento exponencial (não a instantânea) e t é o tempo. Encontre a taxa de crescimento populacional no tempo $t = 5\ anos$, dado $P_0 = 100$ e $r = 0{,}02$.
2) A concentração de um poluente (µg/L) em um rio é modelada pela função $C(t) = 50e^{-0{,}3t} + 20$, onde t é o tempo em dias. Calcule a taxa de variação da concentração do poluente após 5 dias.
3) A taxa de extração de madeira em uma floresta plantada é dada por $R(t) = 100 - 50t$. Encontre a taxa de variação da extração (toneladas/ano) após 10 anos.
4) A recuperação de uma área desmatada é modelada pela função $A(t) = 100(1 - e^{-0{,}05t})$, onde $A(t)$ é a área recuperada em hectares após t anos. Calcule a taxa de recuperação após 20 anos.
5) A porcentagem de uma área coberta por vegetação é modelada por $V(t) = 70 - 3t + 0{,}1t^2$. Determine a taxa de mudança na cobertura vegetal após 15 anos.
6) A quantidade de solo erodido em toneladas por ano é modelada por $E(t) = 500e^{-0{,}2t}$. Calcule a taxa de erosão do solo após 8 anos.
7) A temperatura média global (ºC) é modelada por $T(t) = 14 + 0{,}02t$, onde t é o tempo em anos. Encontre a taxa de mudança na temperatura média global após 50 anos.
8) A dispersão de um poluente no ar (ng/cm³) é dada por $D(t) = 80e^{-0{,}05t}$. Calcule a taxa de dispersão após 3 horas.
9) A concentração de um poluente (µg/L) em um lago aumenta de acordo com $C(t) = 10 + 2t - 0{,}1t^2$. Encontre a taxa de acúmulo após 5 anos.
10) O nível da água (metros) em um reservatório é dado por $L(t) = 50 - 2t + 0{,}05t$. Calcule a taxa de variação do nível da água após 6 meses.
11) O consumo de água (milhões de litros) em uma cidade é modelado por $W(t) = 1000e^{0{,}03t}$. Determine a taxa de consumo de água após 10 anos.
12) A produção de energia solar (MWh) é modelada por $E(t) = 500(1 - e^{-0{,}1t})$. Calcule a taxa de produção de energia solar após 5 anos.

13) A concentração de um poluente em um lago ao longo do tempo é modelada pela função $C(t) = 50e^{-0,2t} + 10$, onde $C(t)$ é a concentração do poluente em ppm (partes por milhão) e t é o tempo em dias. A) Encontre a primeira derivada para determinar a taxa de mudança da concentração do poluente. B) Encontre a segunda derivada para entender a aceleração ou desaceleração da mudança na concentração do poluente. C) Calcule a segunda derivada no tempo $t = 5$ dias e interprete o significado ambiental desse valor.
14) A quantidade de solo erodido em toneladas por ano em uma determinada área é modelada pela função $E(t) = 500\, e^{-0,3t} + 100$. Onde $E(t)$ é a quantidade de solo erodido e t é o tempo em anos. A) Encontre a primeira derivada para obter a taxa de erosão do solo. B) Encontre a segunda derivada para analisar a aceleração ou desaceleração da erosão do solo. C) Determine o valor da segunda derivada no tempo $t = 3$ anos e interprete o significado desse valor quanto à erosão do solo.
15) A cobertura florestal de uma determinada região foi medida em dois anos consecutivos. No primeiro ano, a área coberta por florestas era de 1500 hectares. No segundo ano, devido a ações de reflorestamento, a cobertura florestal aumentou para 1800 hectares. A) Calcule a porcentagem de variação na cobertura florestal entre os dois anos. B) Interprete o resultado no contexto de ações de reflorestamento.
16) Uma fábrica implementou novas tecnologias para reduzir suas emissões de poluentes. No ano anterior à implementação, a fábrica emitia 200 toneladas de poluentes. No ano seguinte à implementação, as emissões foram reduzidas para 140 toneladas. A) Calcule a porcentagem de variação na emissão de poluentes após a implementação das novas tecnologias. C) Discuta a importância dessa redução para a qualidade do ar na região da fábrica.
17) Uma Estação Ecológica iniciou um programa de conservação para uma espécie de pássaro ameaçada. No início do programa, a população dessa espécie era de 250 indivíduos. Após cinco anos, a população aumento para 325 indivíduos. A) Calcule a porcentagem de variação na população da espécie ao longo dos cinco anos. B) Analise o impacto desse aumento na conservação da espécie.
18) O crescimento da população de peixes P em um lago depende da quantidade de nutrientes N (μg/L) disponível na água, e a quantidade de nutrientes varia com o tempo t. Suponha que o crescimento da população de peixes é dado por $P(N) = 100\sqrt{N}$ e que a quantidade de nutrientes é modelada por $N(t) = 20 + 10e^{-0,05t}$, onde t é o tempo em dias. A) Determine a taxa de variação da população de peixes em relação ao tempo no momento $t = 30$ dias. B) Analise o impacto da variação de nutrientes no crescimento da população de peixes.
19) A população de uma espécie cresce logisticamente segundo a função $P(t) = \frac{K}{1+\left(\frac{K-P_0}{P0}\right)e^{-rt}}$, onde K é a capacidade de suporte do ambiente. Calcule a taxa de crescimento no tempo $t = 10\ anos$, dado $P_0 = 500, K = 500$ e $r = 0,1$.
20) A temperatura média de um lago (ºC) ao longo do ano é modelada pela função $T(t) = 20 + 10sin\left(\frac{2\pi}{12}t\right)$, onde t é o mês do ano. Encontre a taxa de variação da temperatura no mês de abril $(t = 4)$.
21) A biomassa em toneladas de um ecossistema é modelada por $B(t) = 200\sqrt{t+1}$. Encontre a taxa de variação da biomassa após 4 anos.
22) A concentração de nutrientes em um lago em μg/L é dada por $N(t) = 100(1 - e^{-0,1t})$. Calcule a taxa de variação da concentração de nutrientes após 7 anos.
23) A precipitação anual em mm em uma região é modelada por $P(t) = 100 + 20sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$, onde t é o tempo em anos. Determine a taxa de mudança na precipitação no terceiro ano.
24) A produção de energia eólica (MWh) é dada por $W(t) = 200 + 50\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)$. Encontre a taxa de variação da produção de energia eólica no segundo mês.
25) A intensidade de um tornado (km/hora) é modelada por $I(t) = 150e^{-0,05t}$. Determine a taxa de variação da intensidade após 4 horas.

26) A área destruída (hectares) por um incêndio florestal é dada por $A(t) = 100e^{0,2t}$. Calcule a taxa de destruição após 3 horas.
27) A temperatura média T da água de um lago ao longo do dia é uma função da temperatura do ar A e a temperatura do ar varia com o tempo t. Suponha que a temperatura da água é dada por $T(A) = 10 + 0,5A$ e que a temperatura do ar varia com o tempo segundo a função $A(t) = 20 + 5sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)$, onde t é o tempo em horas. A) Encontre a taxa de variação da temperatura da água em relação ao tempo no momento $t = 6$ horas. B) Interprete o resultado acerca das variações diárias de temperatura.
28) A concentração de um poluente C (ppm) em um rio depende da temperatura da água T (ºC) e a temperatura da água varia com o tempo t. Suponha que a concentração de poluentes é dada por $C(T) = 50e^{-0,1T}$ e que a temperatura da água é dada por $T(t) = 25 + 3\cos\left(\frac{\pi}{24}t\right)$, onde t é o tempo em horas. A) Calcule a taxa de variação da concentração de poluentes em relação ao tempo no momento $t = 12$ horas. B) Discuta a implicação desse resultado para o monitoramento da qualidade da água ao longo do dia.

Grupo 6 – Integração

1. Calcule as seguintes integrais indefinidas:
a) $\int 3x\,dx$
b) $\int 5\text{sen}\,x\,dx$.
c) $\int (5x^7+3)\,dx$
d) $\int \text{sen}(2x)dx$
e) $\int\cos(x+5)dx$.
f) $\int \text{tg}\,x\,dx$.
g) $\int \frac{x-1}{(x+2)(x-3)}dx$

2. Calcule a área da região delimitada pela curva $y=x^2-1$ e pela reta $y=0$

3. Calcule a área da região limitada pelo gráfico de $f(x)=x^2+x-2$, pelas retas verticais $x=0$ e $x=2$ e pelo eixo x. (Lembre-se: A= A1+A2)

4. Calcule a área do conjunto de todos os pontos (x, y) tais que $x^2 \leq y \leq 4-x^2$

5. Determine o volume do sólido de revolução, gerado pela rotação da região R em torno do eixo x, delimitada pela curva $y=-x^2$, pelo eixo x e pela reta $x=1$.

Respostas

1. a) $3/2x^2$ +C; b) -5cosx + C; c) $5/8x^8+3x$ +C; d) -1/2cos(2x) + C; e) sen (x+5) + C; f) -lnI$cosx$I +C; g) 3/5lnI$x+2$I$+\frac{2}{5}ln$I$x-3$I +C;
2. A= 4/3u.a.
3. A= A1 + A2 = 3u.a.
4. A= $\frac{16\sqrt{2}}{3}$u.a.
5. V= π/5 u.v.

Grupo 7– Derivação

Determine as soluções das equações diferenciais de variáveis separáveis abaixo:
a) $y' = y^2$
b) $x\,y' = y$

c) $y' = x$
d) $y' = (1- y)(2- y)$
e) $y' = e^{x-2y}$
f) $x^2y^2y' = 1+ x^2$
g) $y' = \sec^2 x \sec^3 y$
h) $y' = y \ln x$
i) $3x2y' = 2y(y -3)$
j) $y' =3x^2 +4x +2/2(y -1)$
k) $y' = y \cos x/1+2y^2$
l) $y' = x^2/y$
m) $y' = x^2/y(1+ x^3)$
n) $y' + y^2 \operatorname{sen} x = 0$
o) $y' = 1+ x + y^2 + x y^2$
p) $y' = (\cos^2 x)(\cos^2 2y)$
q) $x y' =\sqrt{1- y^2}$
r) $y' = x -e^{-x}/y +e^y$
s) $y' = x^2/1+ y^2$
t) $y' =2x/1+2y$

Respostas

(a) $y \equiv 0$ e $y = 1/C-x$; (b) $y = C x$; (c) $y = \pm\sqrt{x^2 +C}$; (d) $y \equiv 1$, $y \equiv 2$, $y =Ce^x-2/Ce^x-1$;(e) $y =1/2 \ln(2e^x +C)$;
(f) $y =\sqrt[3]{3x^2 - 3 - C/x}$ (g) $3\operatorname{sen} y -\operatorname{sen}^3 x = 3\operatorname{tg} x +C$; (h) $y = C(x/e)^x$ (i) $y \equiv 0$, $y \equiv 3$ e $y =3/1-Ce^{-2/x}$; (j) $y^2 -2y = x^3 +2x^2 +2x +C$; (k) $\ln|y| + y^2 = \operatorname{sen} x +C$;(l) $3y^2 -2x^3 = C$; (m) $3y^2 -2\ln|1+ x^3| = C$; (n) $y = 0$ e $y = (C -\cos x)^{-1}$; (o) $y = \operatorname{tg} (x + x^2/2+C)$;(p) $y = (1/2) \arctan(x +(1/2)\operatorname{sen} (2x)+C)$; (q) $y = \pm 1$ e $y = \operatorname{sen} (\ln|x| +C)$;(r) $y^2 - x^2 +2(e^y -e^{-x}) = C$; (s) $3y + y^3 - x^3 = C$; (t) $y^2 + y = x^2 +C$.

Referências

MACÊDO, Maria Joseane Felipe Guedes.
Cálculo II. Mossoró: EdUFERSA, 2013. 92 p.

PIMENTEL, Fernando; MAYMON, Annelise. Aritmética Elementar. Disponível em: <https://www.ced.seduc.ce.gov.br/wp-content/uploads/sites/82/2022/03/AritmeticaelementarA.pdf> .Acesso em out/22

STEWART, James; GLEGG, Daniel; WATSON, Saleem. Cálculo, Volume 1. São Paulo: Cengage, 2021.706p.

STEWART, James; GLEGG, Daniel; WATSON, Saleem. Cálculo, Volume 2. São Paulo: Cengage, 2022.740p

TESSARI, V.; CASALI, R. M.; MIKOWSKI, A. Coletânea de Exercícios de Matemática Básica e Pré-Cálculo. Apostila do Projeto de Extensão Pré-Cálculo Joinville, Departamento de Engenharias da Mobilidade, Centro Tecnológico de Joinville, Universidade Federal de Santa Catarina. 2. ed. Joinville, 2021. Disponível em: <http://precalculojlle.paginas.ufsc.br/files/2018/11/Coletanea_Exercicios_Matematica_Basica.pdf>.Acesso em jun/24